Kernfragen zur Analysis

VII. Differentiation im Banachraum

(Teil 2)

1. Wie ist die zweite (Fréchet-)Ableitung einer Abbildung $f : X \to Y$ zwischen Banachräumen X und Y definiert? Was sind die zweiten Gateux-Ableitungen?
2. Wie lässt sich die zweite Fréchet-Ableitung einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch ihre partiellen Ableitungen ausdrücken?
3. Wann darf man die Reihenfolge der zweiten partiellen Ableitungen vertauschen?
4. Was sind die erste und zweite Ableitung des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ im Hilbertraum H ?
5. Wie lautet die Kettenregel für die zweite Ableitung von $f \circ g$?
6. Wie lässt sich die zweite Ableitung einer Abbildung $f \circ g$ durch die partiellen Ableitungen der Abbildungen $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ausdrücken?
7. Welche Beziehung herrscht zwischen dem Gradient und den Niveauflächen $\{f \equiv \text{const.}\}$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?
8. Welche notwendigen und welche hinreichenden Bedingungen für die Existenz lokaler Maxima/Minima einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kennst Du?
9. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Welche der folgenden Aussagen sind für Abbildungen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ richtig, welche falsch?
   (a) Konvexe Funktionen sind stetig.
   (b) Konvexe Funktionen sind im Inneren des Definitionsbereiches stetig.
   (c) Konvexe Funktionen sind zweimal differenzierbar und haben in jedem Punkt eine positiv semidefinite zweite Ableitung.
   (d) Zweimal differenzierbare Funktionen mit (überall) positiv semidefiniter Hesse-Matrix sind konvex.
   (e) Zweimal differenzierbare Funktionen mit (überall) (strikt) positiv definiter Hesse-Matrix sind strikt konvex.
   (f) Konvexe Funktionen nehmen ihr Minimum an.
   (g) Konvexe Funktionen auf kompakten Gebieten nehmen ihr Minimum an.
   (h) Strikt konvexe Funktionen besitzen höchstens ein Minimum.
   (i) Strikt konvexe Funktionen auf kompakten Gebieten besitzen genau ein lokales Minimum.
   (j) Strikt konvexe Funktionen auf kompakten Gebieten besitzen genau ein Minimum.
10. Wo nimmt eine symmetrische quadratische Form ihr Maximum/Minimum auf der Einheitssphäre an? Beweis?

11. Wie lautet die Taylor-Approximation einer Funktion $f \in C^{n+1}(U, Y)$, $U \subseteq X$ offen, in einem Punkt $x_0 \in U$? Welche Darstellungen/Abschätzungen des Restgliedes kennst Du?