Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher
http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 25.10.2012, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.

Aufgabe 1:

Bei einem Fußballturnier treten je zwei Teams genau einmal gegeneinander an und ermitteln einen Sieger. Zeige (durch vollständige Induktion), dass die Teams so aufgereiht werden können, dass jedes über seinen unmittelbaren Nachfolger gesiegt hat.

Freiwilliger Zusatz: Ist die Reihenfolge eindeutig? Stellt sie eine „faire" Rangordnung dar?

Aufgabe 2: Annaliese lernt fleißig die Bruchrechnung. Sie schreibt die Brüche

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2+\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}, \quad \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}, \quad \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}}, \quad \cdots$$

in gekürzter Form und fragt sich, wie sich die Folge dieser (gekürzten) Brüche fortsetzt. Kannst Du ihr helfen?

Aufgabe 3: Berechne die folgende Summe:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Tipp Benutze:

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

und summiere über k

Aufgabe 4: Beweise, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ gilt:

(i)
$$\sum_{k=0}^{n} q^{-k} = \frac{q - q^{-n}}{q - 1},$$

(ii)
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2.$$