Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

2. Blatt, Abgabe am Donnerstag, 01.11.2012, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.

Aufgabe 5: Beweise oder widerlege die folgenden Summenformeln, die fr alle $n \geq 1$ behauptet sind:

(i) $$\sum_{k=0}^{n} (n+k)(n-k) \;=\; \frac{1}{2}\left(3n\,(3n-5)+8\right)$$

(ii) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \;=\; 1 - \frac{1}{n+1}$$

(iii) $$\sum_{0 \leq k \leq n,\; k \,\text{gerade}} \binom{n}{k} \;=\; \sum_{0 \leq k \leq n,\; k \,\text{ungerade}} \binom{n}{k}.$$

(iv) $$\sum_{k=1}^{n} k^4 \;=\; 2^{n^2} + 2n - 3$$

Aufgabe 6: Diskutiere die folgende Musterlösung einer Aufgabe aus der Scheinklausur zum Brückenkurs. Beachte, dass mit $\|x\|$ der gewöhnliche Betrag von x gemeint ist.

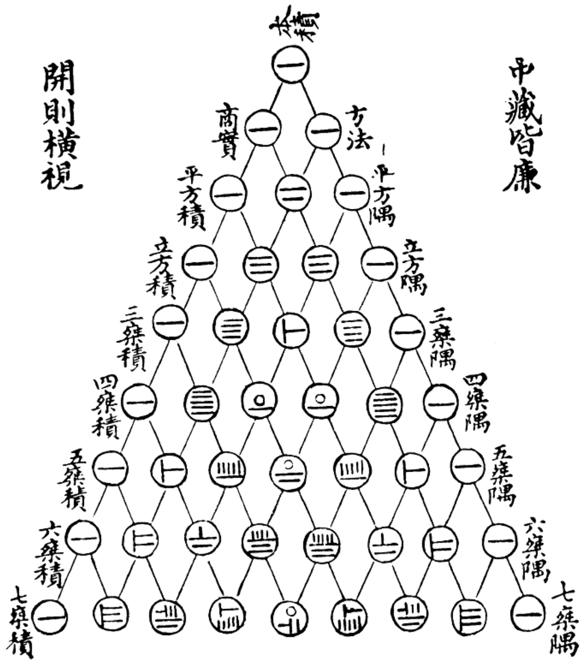
> Teil c:
> Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \big|\,|x|\,\big|$ an, sodass f injektiv ist.
>
> Diese Aufgabe ist ganz leicht, wenn man ein Bild von der Absolutbetrag-Abbildung im Kopf hat.
> Lassen wir als Definitionsbereich nur positive reelle Werte zu (ohne die Null), d.h. $D = \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$, dann gilt:
> Seien $x, y \in D$. Aus $x \neq y$ folgt dann auch $f(x) \neq f(y)$. Demnach ist f injektiv.

(i) Zeige, dass der in der Musterlösung angegebene Definitionsbereich nicht maximal ist, indem du ihn (unter Beibehaltung der Injektivität von f) vergrößerst.

(ii) Widerlege die in der Aufgabenstellung implizit behauptete Eindeutigkeit der Lösung durch die Angabe von mindestens drei paarweise verschiedenen, jeweils maximalen Mengen $D \subset \mathbb{R}$, auf denen f injektiv ist.

Freiwilliger Zusatz: Geben Sie alle maximalen Injektivitätsbereiche von f an.

Aufgabe 7: Bereits 1303 wurde in China folgendes Diagramm gedruckt (!)



Was könnte das Diagramm mathematisch darstellen. Finde einen Fehler! Kannst Du anhand des Diagramms herausfinden, wie die Zahl 24 auf Chinesisch geschrieben wurde?

Aufgabe 8: In Abessinien multiplizierte man früher nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{rrrl}
 & 26 & 77 & \\
 & 13 & 154 & + \\
 & 6 & 308 & \\
 & 3 & 616 & + \\
 & 1 & 1232 & + \\
\hline
26 \times 77 & = & 2002 &
\end{array}$$

Hier wurde also immer links ohne Rest halbiert und rechts verdoppelt. Danach wurden in der rechten Spalte alle Zeilen aufsummiert, deren linker Eintrag ungerade ist. Berechne 23 $\times$89 nach diesem Schema. Zeige Verständnis für die Abessinier und begründe ihr Verfahren allgemein.

Freiwilliger Zusatz: Berechne das Produkt ausschließlich unter Verwendung römischer Ziffern.