Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher
http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 08.11.2012, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.

Aufgabe 9: Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert als

$$f_0 = 0, \qquad f_1 = 1, \qquad f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Beweise für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Summenformel:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n f_{n+1}$$

Freiwilliger Zusatz: Versuche die Aussage geometrisch zu beweisen

Aufgabe 10: Beweise für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Formel

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n-k}{k} = f_{n+1}$$

Hier ist f_n die Fibonacci-Folge f_n aus der vorigen Aufgabe. Gib eine kombinatorische Interpretation.

Aufgabe 11: Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ kann eindeutig im Dezimalsystem dargestellt werden. Dies bedeutet, dass es ein eindeutiges $N \in \mathbb{N}_0$ und eine eindeutige Ziffernfolge $a_i \in \{0, 1, 2, ..., 9\}, a_N \neq 0, i \in \mathbb{N}_0, 0 \leq i \leq N$ gibt, für die gilt:

$$n = \sum_{i=0}^{N} 10^i a_i$$

Beweise, dass n genau dann durch 11 teilbar ist, wenn die alternierende Summe S_a der Ziffern der Dezimaldarstellung a_i durch 11 teilbar ist.

Hinweis Die alternierende Summe S_a ist definiert durch

$$S_a := \sum_{i=0}^{N} (-1)^i a_i$$

Aufgabe 12: Schreibe dir

$$\binom{n}{k} \bmod 2$$

wie im Pascalschen Dreieck auf. Welches Muster kannst du erkennen? Beweise die folgenden Äquivalenzen:

(i) $\binom{n}{k}$ ist gerade für alle $1 \leq k \leq n-1$ genau dann, wenn $n = 2^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) $\binom{n}{k}$ ist ungerade für alle $0 \leq k \leq n$ genau dann, wenn $n = 2^m - 1$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$ gilt.