Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 15.11.2012, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.

Aufgabe 13: Beweise oder widerlege für

$$f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

die folgenden Aussagen.

(i) f, g injektiv $\Rightarrow f \circ g$ injektiv

(ii) f, g surjektiv $\Rightarrow f \circ g$ surjektiv

(iii) f injektiv, g surjektiv $\Rightarrow f \circ g$ injektiv/surjektiv

(iv) f surjektiv, g injektiv $\Rightarrow f \circ g$ injektiv/surjektiv

(v) Es existiert ein bijektives f und ein injektives, aber nicht surjektives g, so dass $f \circ g$ bijektiv ist.

(vi) Es existiert ein surjektives f und ein nicht surjektives g, so dass $f \circ g$ surjektiv ist.

(vii) Es existiert ein nicht surjektives f und ein surjektives g, so dass $f \circ g$ surjektiv ist.

(viii) Es existiert ein nicht injektives f und ein injektives g, so dass $f \circ g$ injektiv ist.

(ix) Es existiert ein surjektives g, so dass für alle injektiven f gilt: $f \circ g$ ist nicht injektiv.

(x) Es existiert ein nicht injektives f und ein injektives, aber nicht surjektives g, so dass $f \circ g$ surjektiv ist.

(xi) Für alle surjektiven f existiert ein g, so dass $f \circ g$ bijektiv ist.

Aufgabe 14: Finde ein Gegenbeispiel oder beweise für alle

$$f : A \to B, \qquad A_j \subset A, \qquad B_j \subset B, \qquad j \in J$$

die folgenden Aussagen.

(i) $f(A_j) \subset f(A)$

(ii) $f^{-1}(f(A_j)) = A_j$

(iii) $f(A) \setminus f(A_j) = f(A \setminus A_j)$

(iv) $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$

(v) $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$

(vi) $f\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) = \bigcup_{j\in J} f(A_j)$

(vii) $f\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \bigcap_{j\in J} f(A_j)$

(viii) $f^{-1}(B \setminus B_j) = A \setminus f^{-1}(B_j)$

(ix) $A \setminus \left(\bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B \setminus B_j)$

Freiwilliger Zusatz Verändere die Mengenrelationen und/oder die Vorraussetzungen der Abbildung, sprich füge injektiv, surjektiv oder bijektiv ein, so, dass die falschen Aussagen stimmen.

Aufgabe 15: Beweise oder widerlege für beschränkte Mengen $A, B \subset \mathbb{Z}$

(i) $\max(A + B) = \max A + \max B$, wobei $A + B := \{a + b\,;\, a \in A,\, b \in B\}$;

(ii) $\max(A \setminus B) = \max A - \max B$;

(iii) $\max(A \setminus B) = \max A - \min B$;

(iv) Für $A, B > 0$ gilt $\max(A\cdot B) = \max A\cdot \max B$, wobei $A\cdot B := \{a\cdot b\,;\, a \in A,\, b \in B\}$;

(v) $\max(A \cap B) = \min\{\max A, \max B\}$.

(vi) $\max(A \cap B) = \max\{\max A, \max B\}$.

(vii) $\max(A \cup B) = \min\{\max A, \max B\}$.

(viii) $\max(A \cup B) = \max\{\max A, \max B\}$.

Aufgabe 16: Es sei S_A die Menge aller Permutationen p der Menge A, d.h die Menge aller bijektiven Abbildungen $p : A \to A$.
Das kartesische Produkt von Mengen $A_i,\ i \in I \subset \mathbb{N}$ ist definiert als:

$$\Pi_{i\in I} A_i := \left\{ (a_i)_{i\in I} \;\middle|\; a_i \in A_i,\ \forall i \in I \right\}$$

Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen.

(i) A endlich $\Rightarrow$ S_A endlich.

(ii) A abzählbar $\Rightarrow$ S_A abzählbar.

(iii) A abzählbar $\Rightarrow$ die Menge aller endlichen Teilmengen von A ist abzählbar.

(iv) Abzählbare kartesische Produkte endlicher Mengen sind abzählbar.

(v) Endliche kartesische Produkte abzählbarer Mengen sind abzählbar.