

Übungen zur Vorlesung
Analysis I
Bernold Fiedler, Stefan Liebscher
<http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/>
Abgabe: Donnerstag, 22.11.2012, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.

Aufgabe 17: Sei M eine wohlgeordnete Menge und $A \subset M$ eine Teilmenge. Zeige, dass

$$\min A, \max A, \inf A, \sup A$$

eindeutig sind, falls sie existieren.

Aufgabe 18: Zeige, dass zwei Teilmengen $L, R \subset \mathbb{R}$ genau dann ein Dedekindscher Schnitt sind, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $L \cup R = \mathbb{R}$

(ii) $\sup L = \inf R$

(iii) $L \cap R = \emptyset$, $L \neq \emptyset$, $R \neq \emptyset$

Aufgabe 19: Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend. Dazu gebe es zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f(a) > a$, sowie $f(b) < b$. Zeige, dass f mindestens einen Fixpunkt besitzt.

Ein Fixpunkt von f ist ein $x \in \mathbb{R}$, so dass gilt $f(x) = x$

Aufgabe 20: [Intervallschachtelung] Gegeben seien abgeschlossene Intervalle reeller Zahlen,

$$I_n = [a_n, b_n], \quad a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset.$$

Freiwilliger Zusatz: Sei $b_n - a_n < 1/n$. Zeige, dass obiger Schnitt genau eine Zahl enthält.