Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 29.11.2012, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.

Aufgabe 21: Bestimme alle komplexen Zahlen z (und skizziere die Lösungsmengen) für die gilt

(i) $\Re\mathrm{e}(z^2) < 0$;

(ii) $\left|\frac{z+1}{z-\mathrm{i}}\right| \le 1 \le \left|\frac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right|$;

(iii) $\Im\mathrm{m}\left(\mathrm{i}\frac{1+z}{1-z}\right) > 0$.

Aufgabe 22: Nach zehnjähriger Suche ritzt Hamilton folgende Relationen für die Multiplikation gewisser Elemente i, j, k der Quaternionen $\mathbb{H}$ in eine Dubliner Brücke:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Finde komplexe 2x2 Matrizen $M_i, M_j, M_k \in \mathbb{H}$, welche diese Relationen erfüllen.

Aufgabe 23: Annaliese ist etwas Schreckliches passiert: sie hat die genaue Definition des Häufungswerts für Folgen x_n vergessen. Sie erinnert sich nur noch an folgendes:

ψ ist ein Häufungspunkt der Folge $x_n :\Leftrightarrow \exists$ Teilfolge x_{n_k} mit ...., so dass $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \psi$.

Jetzt weiß sie nicht mehr, was für die Konvergenz der Teilfolgen x_{n_k} gelten muss, sprich was in .... eingesetzt werden darf:

(i) $\forall k \ : \ n_{k+1} > n_k$

(ii) $\forall k \ : \ n_k \ge k$

(iii) $n_k \to \infty$

Dabei heißt $n_k \to \infty$: zu jeder natürlichen Zahl m existiert ein k_0, so dass $n_k \ge m$ für alle $k \ge k_0$ gilt.
Hilf Annaliese und zeige, dass alle drei Möglichkeiten äquivalente Definitionen ergeben.

Aufgabe 24: Betrachte die Abbildung

$$I : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}\,,\ I(z) := \frac{1}{\overline{z}}$$

(i) Zeige, dass I die Inversion („Spiegelung“) am Einheitskreis ist: der Punkt $A \neq 0$ wird abgebildet auf denjenigen Punkt A' auf dem Strahl vom Ursprung O in Richtung A, für den das Produkt der Streckenlängen OA und OA' gleich 1 ist.

(ii) Bestimme die Menge der Fixpunkte $I(z) = z$ von I und beschreibe diese Menge geometrisch.

(iii) Beweise, dass I eine Involution ist, d.h. $I(I(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(iv) Präzisiere und beweise: I bildet Geraden und Kreise auf Geraden und Kreise ab.