Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher
http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 06.12.2012, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.

Aufgabe 25: Beweise oder widerlege die folgende Aussage.
Die Folge der $n_k,\ k \in \mathbb{N}$ sei eine Permutation von $\mathbb{N}$, das heißt: die Abbildung $k \mapsto n_k$ von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ sei bijektiv. Dann gilt:

$$\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$$

Aufgabe 26: Bestimme alle Häufungspunkte der Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

(i) $x_n = n\mathrm{i}^n/(n+1) \in \mathbb{C}$;

(ii) $x_n = q^n/n^p$ für beliebige feste $q > 1,\ p \in \mathbb{N}$.

(iii) $x_n = n^p q^n$ für beliebige feste $0 < q < 1,\ p \in \mathbb{N}$

(iv) $x_n = \frac{(1+\mathrm{i})}{\sqrt{2}}^n \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 27: Annaliese und Annalyx diskutieren über das Cauchykriterium für Folgen x_n. Da bei ihrem Smartphone der Akku leer ist, müssen sie selber nachdenken. Dabei können sie sich darauf einigen, dass folgendes gelten muss:

$$x_n \text{ ist eine Cauchyfolge } :\Leftrightarrow \forall(*)\ \exists N \in \mathbb{N}\text{ , so dass für } (**) \text{ gilt: } |x_n - x_m| \leq (***)$$

Beide wollen allerdings unterschiedliche Ausdrücke in $(*)$, $(**)$ und $(***)$ einsetzen:

(i) Annaliese würde gerne in $(*)$ $\bar{N} \in \mathbb{N}$, in $(***)$ $1/\bar{N}$ und in $(**)$ $\forall n, m \geq N$ einsetzen.

(ii) Annalyx hingegen möchte in $(*)$ $\epsilon > 0$, in $(***)$ ϵ und in $(**)$ $\forall n, m := n+1 \geq N$ einsetzen.

Wer hat recht: Annaliese, Annalyx, beide oder keiner von beiden?

Aufgabe 28: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und

$$\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

die Folge der arithmetischen Mittelwerte.

(i) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Zeige, dass dann auch $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Was ist der Grenzwert?

(ii) Finde eine divergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Mittelwerte μ_n trotzdem konvergieren.