

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

<http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/>

Abgabe: Donnerstag, 13.12.2012, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.

Aufgabe 29: Wir haben 2π als den Umfang des Einheitskreises durch Vergleich mit dem Umfang des ein- bzw. umbeschriebenen 2^n -Ecks definiert. Zeige, dass die entsprechenden Flächen gegen π konvergieren. Diskutiere kritisch, ob das beweist, dass die Fläche des Einheitskreises π ist.

Aufgabe 30: Sei a_n eine Folge reeller, positiver Zahlen. Die Folge der geometrischen Mittel μ_n ist wie folgt definiert:

$$\mu_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$$

Beweise oder widerlege:

- (i) Falls a_n konvergiert, so konvergiert auch μ_n gegen denselben Grenzwert.
- (ii) Falls μ_n konvergiert, so konvergiert auch a_n gegen denselben Grenzwert.

Aufgabe 31: Zeige die Konvergenz und bestimme die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen x_n für $n \rightarrow \infty$.

(i) $x_n = \frac{20n^2 + 3\sqrt{n} - 5}{7n^2 - 101n + 13}$;

(ii) $x_n = \sqrt{4n^2 + n} - 2n$;

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$

(iv) $x_n = (1 - 1/n)^n$;

Tipp Benutze (iii) für (iv)

Aufgabe 32: Berechne den Grenzwert der folgenden Rekursion

$$x_0 = 5, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}x_{n-1}$$