Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher
http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 20.12.2012, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.

Aufgabe 33: Gegeben seien zwei ganzzahlige Vektoren z und z' im Gitter $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, so dass die Matrix, welche aus den Vektoren z, z' zusammengesetzt ist, die Determinante eins besitzt.
Beweise, dass weder im Innern noch auf dem Rand des von z und z' aufgespannten Parallelogramms (sprich, das Parallelogramm mit den Eckpunkten $0, z, z', z+z'$) weitere Gitterpunkte liegen, außer diesen vier Ecken.

Aufgabe 34: Zur Kettenbruchentwicklung $\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, ...]$ der Irrationalzahl $\alpha > 0$ betrachte den Streckenzug mit Eckpunkten $z_{-1}, z_1, z_3, z_5, ...$ der Iteration.

$$z_{n+1} = a_n z_n + z_{n-1};\ z_{-1} := (1,0),\ z_0 := (0,1)$$

Wir wissen, dass der Streckenzug in der (q,p)-Ebene unterhalb der Geraden $p = \alpha q$ liegt.

(i) Zeige, dass keine Gitterpunkte $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ im positiven Quadranten echt zwischen dem Streckenzug und der Geraden liegen.

(ii) Was bedeutet das Resultat für die Approximation von α durch rationale Zahlen?

(iii) Wie lautet das entsprechende Ergebnis für den Streckenzug zu $z_0, z_2, z_4, ...$? (Nur formulieren, kein erneuter Beweis!)

Tipp: Das Ergebnis der vorigen Aufgabe 33 darf benutzt werden.

Aufgabe 35: Sei α durch die Kettenbruchentwicklung definiert.

$$a_0 := 0; \qquad a_n := 1,\ \text{für alle } n > 0.$$

(i) Wie hängen die z_n aus Aufgabe 34 mit den Fibonaccizahlen f_n zusammen?

(ii) Beweise, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \alpha$.

(iii) Beweise, dass α der Goldene Schnitt ist, d.h. dass $1 : \alpha = \alpha : (1-\alpha)$.

(iv) In welchem Sinne mag der Goldene Schnitt als die „irrationalste" Irrationalzahl gelten, d.h. als diejenige irrationale Zahl, die sich am „schlechtesten" durch rationale Zahlen approximieren lässt?

Aufgabe 36: Zeige, dass eine positive reelle Zahl genau dann rational ist, wenn ihre Kettenbruchentwicklung abbricht, d.h. nur endlich viele von Null verschiedene Folgenglieder besitzt.