

Übungen zur Vorlesung

**Analysis I**

Bernold Fiedler, Hannes Stuke, Bernhard Brehm

<http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/>

**Abgabe: Donnerstag, 24.01.2013, 14.00 Uhr**

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.

**Aufgabe 41:** Beweise die folgenden Summenformeln:

$$(i) \sum_{n=0}^N \sin(nx) = \frac{\sin(\frac{N}{2}x) \sin(\frac{N+1}{2}x)}{\sin(\frac{1}{2}x)}, \quad \text{falls } \sin(\frac{1}{2}x) \neq 0;$$

$$(ii) \sin(Nx) = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} (\cos x)^n (\sin x)^{N-n} \sin\left(\frac{1}{2}(N-n)\pi\right);$$

**Aufgabe 42:** Prüfe folgende Funktionen auf Stetigkeit und gebe die Stetigkeitsgebiete an:

$$(i) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 17x + 4}{x - 4} & \text{falls } x \neq 4 \\ -1 & \text{falls } x = 4 \end{cases}$$

$$(ii) f(x) = \begin{cases} x^{1/n} & \text{falls } x \geq 0 \\ -|x|^{1/n} & \text{falls } x < 0 \end{cases} \quad \text{mit festem } n \in \mathbb{N}$$

$$(iii) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{falls } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

$$(iv) f(x) = \begin{cases} \left| \frac{1}{x} - \left[ \frac{1}{x} \right] - \frac{1}{2} \right| & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet die Gauss-Klammer  $[x]$  wieder die größte ganze Zahl kleiner oder gleich  $x$ .

**Aufgabe 43:** Beweise oder widerlege die Existenz stetiger Funktionen mit  $f(0) = 0$  und  $f(1) = 1$ :

$$(i) f : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\};$$

$$(ii) f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \cap \mathbb{Q};$$

$$(iii) f : [0, 1] \cap \mathbb{Q} \rightarrow [0, 1] \cap \mathbb{Q};$$

$$(iv) f : [0, 1] \cap \mathbb{Q} \rightarrow \{0, 1\};$$

**Aufgabe 44:** Gebe die Stetigkeits- und Unstetigkeitsstellen der Funktion  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  an:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \text{ mit teilerfremder Darstellung } x = \frac{p}{q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$