

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Bernold Fiedler, Hannes Stuke, Bernhard Brehm

<http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/>

Abgabe: Donnerstag, 31.01.2013, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.

Aufgabe 45: Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeige, dass f Intervalle auf Intervalle abbildet. Dabei können die Intervalle offen, halboffen oder abgeschlossen und beschränkt oder unbeschränkt sein.

Aufgabe 46: Welche der folgenden Funktionenfolgen f_n konvergieren punktweise und welche gleichmäßig auf dem Intervall I ?

(i) $f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}$, auf $I = \mathbb{R}$;

(ii) $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{für } 0 \leq x < 1/n, \\ 2n - n^2 x & \text{für } 1/n \leq x < 2/n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ auf $I = [0, 1]$;

(iii) $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k^2}$, auf $I = \mathbb{R}$.

Aufgabe 47: Sei D eine Menge von N verschiedenen reellen Zahlen.

(i) Welche Abbildungen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig?

(ii) Beweise, dass der reelle Vektorraum $X = C(D, \mathbb{R})$ isomorph dem Vektorraum \mathbb{R}^N ist, d.h., dass es eine bijektive und lineare Abbildung $J : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ gibt.

Aufgabe 48: Gibt es eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die *jeden* Wert $y \in \mathbb{R}$

(i) genau 2012 mal,

(ii) genau 2013 mal

annimmt?