

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Bernold Fiedler, Hannes Stuke, Bernhard Brehm

<http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/>

Abgabe: Donnerstag, 07.02.2013, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.

Aufgabe 49:

- (i) Annalyx hat in einer Logarithmentafel die Näherungswerte $\lg 2 = 0,3010$ und $\lg 2.718 = 0,4343$ gefunden. Aus der Schule „weiss“ er, dass der „Zehnerlogarithmus“ \lg eine stetige und reellwertige Funktion auf den positiven reellen Zahlen ist, mit $\lg 10 = 1$, so dass die Produktformel

$$\lg(xy) = \lg x + \lg y$$

für alle $x, y > 0$ gilt. Wie kann er die „natürlichen“ Logarithmen $\log 2$ und $\log 10$ berechnen?

- (ii) Nun hat Annalyx der Ehrgeiz gepackt und er will eine ebensolche stetige Funktion $\log_b(x)$ finden, für beliebiges $b > 0$, die aber $\log_b(b) = 1$ erfüllt. Wie hängen \log_b, \lg, \log und $\log_{1/b}$ zusammen?

Aufgabe 50: Wo sind folgende Funktionen stetig, differenzierbar bzw. stetig differenzierbar?

$$(i) f(x) = \begin{cases} x \cdot |x|^\alpha & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Hierbei sei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest, aber beliebig.

$$(ii) f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 51: Wo ist die folgende Funktion stetig, differenzierbar bzw. stetig differenzierbar?

$$f(x) = \begin{cases} q^{-2} & \text{falls } x = p/q, p, q \in \mathbb{Z}, p, q \text{ teilerfremd} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 52: Beweise oder widerlege für $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

(i) Ist f' in $x \in (a, b)$ differenzierbar, so gilt:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

(ii) Wenn

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

existiert, so ist f in x differenzierbar und die Ableitung ist der obige Grenzwert.