

Kernfragen zur Analysis

II. Folgen und Reihen

1. Wann nennt man eine Folge x_n reeller Zahlen konvergent und wann divergent?
2. Wie ist der Grenzwert einer Folge definiert?
3. Was sind Supremum und Infimum der Folgen $(1 + \frac{1}{n})^n$ und $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$?
4. Wie sind Häufungswerte einer Folge x_n definiert?
5. Was sind die Häufungswerte der Folge $(-1)^n + \frac{1}{n}$?
6. Was sind Limes superior und Limes inferior einer reellwertigen Folge? Wann existieren sie? Wann stimmen Limes superior und Limes inferior überein?
7. Kann man Limes superior und/oder Limes inferior auch für komplexwertige Folgen definieren?
8. Was besagt das Konvergenzkriterium von Cauchy? Warum gilt es?
9. Welche monotonen Folgen besitzen einen Grenzwert?
10. Welche dieser Folgen konvergieren für $n \rightarrow \infty$? Was sind ggf. ihre Grenzwerte?

$$\frac{n^2}{3n-2}, \quad \frac{3n^2-2}{2n^2+3}, \quad \frac{2^n}{n!}, \quad \sqrt[n]{n}, \quad q^{1/n}, \quad q \in \mathbb{R}.$$

11. Wie lautet der Satz von Bolzano-Weierstraß?
12. Wieviele Häufungswerte kann eine beschränkte, reellwertige Folge mindestens/höchstens besitzen?
13. Wie ist ein Kettenbruch definiert?
14. Wie unterscheiden sich Kettenbrüche rationaler und irrationaler Zahlen?
15. Wann heißt eine Reihe konvergent, wann absolut konvergent?
16. Für welche komplexen q existiert $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$? Welchen Wert hat die Summe?
17. Warum divergiert die harmonische Reihe?
18. Wie lauten Cauchy-, Majoranten-, Verdichtungs- und Leibniz-Kriterium für die Konvergenz unendlicher Reihen?
19. Wie lauten Wurzel- und Quotientenkriterium für die Konvergenz unendlicher Reihen? Bei welchen der folgenden Reihen gibt das Quotientenkriterium Aufschluss über Konvergenz oder Divergenz?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n}.$$

20. Wie lautet der kleine Umordnungssatz absolut konvergenter Reihen?
21. Wie lautet der große Umordnungssatz absolut konvergenter Reihen?
22. Welche der folgenden Reihen konvergieren, welche konvergieren absolut?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{C}.$$

23. Was ist eine Potenzreihe? Was ist ihr Konvergenzradius? Wie berechnet er sich?
24. Wann ist das Produkt zweier Potenzreihen wieder eine Potenzreihe? Wie lautet sie? Wie hängen die Konvergenzradien der Potenzreihen und ihres Produktes zusammen?
25. Wie lauten die Darstellungen von $\exp(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ als Potenzreihen?
26. Wie hängen e^z , $\sin(z)$, $\cos(z)$ im Komplexen zusammen?