## Kernfragen zur Analysis

# IV. Differentiation

1. Wann heißt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0$ differenzierbar? Wie lässt sich die Ableitung geometisch interpretieren?
2. Gib Beispiele oder argumentiere warum kein solches Beispiel existieren kann für stetige Funtionen $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften an:
   (a) stetig, aber in $x_0 = 1/2$ nicht differenzierbar;
   (b) differenzierbar, beschränkt und gleichmäßig stetig, aber $f'$ unbeschränkt
   (c) differenzierbar, beschränkt, aber $f'$ unbeschränkt und $f$ nicht gleichmäßig stetig
   (d) differenzierbar, unbeschränkt, aber $f'$ beschränkt
   (e) differenzierbar, beschränkt, $f'$ beschränkt, aber $f$ nicht gleichmäßig stetig.
3. Was bedeuten die Landau-Symbole $o(h)$, $\mathcal{O}(h^2)$ und $o(1)$ ? Wie lassen sich Stetigkeit und Differenzierbarkeit mit ihrer Hilfe ausdrücken?
4. Für welche reellen $\alpha$ ist $|x|^\alpha$ in $x = 0$ differenzierbar?
5. Wie lautet die Produktregel für Ableitungen? Warum gilt sie (Beweis)?
6. Wie lauten Quotienten- und Kettenregel für Ableitungen?
7. Was sind die Ableitungen folgender Funktionen nach $x$?
$$\mathrm{e}^x \sin x, \qquad \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \exp(-x^2), \qquad \log\frac{1+x}{1-x}, \qquad x^x$$
8. Wann besitzt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Umkehrfunktion $f^{-1}$ ?
9. Wie lautet der Mittelwertsatz (der Differentialrechnung)? Wie lautet der Satz von Rolle?
10. Warum gilt der Satz von Rolle (Beweisskizze)?
11. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Welche (notwendige) Bedingung ist erfüllt, wenn $f$ an der Stelle $x_0$ ein lokales Maximum besitzt? Unter welcher (hinreichenden) Bedingung besitzt $f$ an der Stelle $x_0$ ein lokales Maximum?
12. Wie lauten die Regeln von de L'Hospital?
13. Welche Werte haben die stetigen Fortsetzungen folgender Funktionen in $x = 0$ ?
$$\frac{\sin x}{x}, \qquad \frac{\cos x - 1}{x^2}, \qquad \frac{\log(1+x)}{x}, \qquad \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$$
14. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Welche (notwendige) Bedingung ist erfüllt, wenn $f$ an der Stelle $x_0$ ein lokales Maximum besitzt? Unter welcher (hinreichenden) Bedingung besitzt $f$ an der Stelle $x_0$ ein lokales Maximum?

15. Wann heißt eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ konvex? Wann heißt sie strikt konvex?
16. Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sei zweimal diferenzierbar. Wie lassen sich Konvexität und strikte Konvexität durch Bedingungen an die zweite Ableitung ausdrücken?
17. Wieviele Minima kann eine strikt konvexe Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ haben? (Gib alle möglichen Zahlen an.)