Beispielklausur

Analysis I

Bernold Fiedler

Wintersemester 2012/13

Insgesamt sind maximal 16 Punkte zu erreichen.

Aufgabe 1 (1 Punkt): Wie lautet der *Binomische Lehrsatz*? Wie folgt daraus folgende Identität?

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Aufgabe 2 (1 Punkt): Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Wie sind *Supremum* und *Infimum* von A definiert? Wann besitzt A ein Supremum?

Aufgabe 3 (1 Punkt): Welche dieser Folgen konvergieren für $n \to \infty$? Was sind ggf. ihre Grenzwerte?

$$\frac{n^2}{3n-2}, \qquad \frac{3n^2-2}{2n^2+3}, \qquad \frac{2^n}{n!}, \qquad q^{1/n},\ q \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4 (1 Punkt): Was ist eine Potenzreihe? Was ist ihr Konvergenzradius? Wie berechnet er sich?

Aufgabe 5 (1 Punkt): Wann heißt eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, gleichmäßig stetig? Unter welcher (hinreichenden) Bedingung sind stetige Funktionen gleichmäßig stetig?

Aufgabe 6 (1 Punkt): Gib ein Beispiel einer Funktionenfolge $f_n : [0,1] \to [0,1]$ an, die punktweise aber nicht gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 7 (1 Punkt): Für welche reellen α ist $|x|^\alpha$ in $x = 0$ differenzierbar?

Aufgabe 8 (1 Punkt): Wie lautet das n-te Taylor-Polynom? Wie kann das Restglied ausgedrückt werden?

Aufgabe 9 (4 Punkte): Prüfe, ob die folgenden Reihen konvergieren.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((2n)!)^3}{((3n)!)^2}$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!(3n)!}{n!(4n)!}$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$

Aufgabe 10 (4 Punkte): Bestimme folgende Grenzwerte.

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$, mit $a > 0$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^{1/x}$

Grundsätzlich sind alle Behauptungen zu begründen.