Extrablatt zur Bekämpfung der Langeweile über die Festtage

Analysis I

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher
http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 10.01.2013, 14.00 Uhr

Nur bearbeitete Aufgaben werden besprochen. Keine der Aufgaben zählen zum Aufgaben-Soll. Erreichte Punkte werden aber trotzdem positiv angerechnet und können auch ein früheres Minus ausgleichen. Frohe Weihnacht, guten Rutsch und ein friedliches Jahr 2013.

Weihnachtsaufgabe 1: Eine Expedition macht sich zum Nordpol auf, um den Weihnachtsmann zu besuchen. Ihr einziges Raupenfahrzeug verbraucht einen Liter Glühwein pro Kilometer und besitzt einen Tank, der genau 1000 Liter Glühwein fasst. Das Basislager befindet sich 2000 Kilometer vom Nordpol entfernt und verfügt über unbegrenzte Glühweinvorräte. Unterwegs kann die Expedition beliebig große Vorratsdepots anlegen, der Transport von Glühwein ist aber ausschließlich im Tank des Raupenfahrzeugs möglich.

Wieviel Glühwein wird (mindestens) benötigt, um vom Basislager zum Nordpol zu gelangen?
Hinweis: Für den Rückweg wird auf den ebenfalls unbegrenzten Gühweinvorrat des Weihnachtsmanns vertraut.
Alternativfrage: Wie weit kann die Expedition mit 1000, 2000, …, $n \cdot 1000$ Litern Glühwein höchstens kommen?

Weihnachtsaufgabe 2: Beweise oder widerlege.

(i) Eine reellwertige Folge ist genau dann beschränkt, wenn jede ihrer Teilfolgen eine konvergente Teilfolge enthält.

(ii) Eine reellwertige Folge ist genau dann konvergent, falls jede Teilfolge eine konvergente Teilfolge enthält.

(iii) Eine reellwertige Folge ist genau dann konvergent, falls es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt, so dass jede Teilfolge eine gegen x konvergente Teilfolge enthält.

Hinweis: Uneigentliche Konvergenz nach $\pm\infty$ zählt hier nicht als Konvergenz.

Weihnachtsaufgabe 3: Zeige, dass für jede Folge a_n positiver reeller Zahlen die Ungleichungskette

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \;\leq\; \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \;\leq\; \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

gilt. Finde ein Beispiel, so dass überall Ungleichheit gilt.
Bemerkung: Wir haben diese Ungleichungskette schon bei der Unterscheidung von Wurzel- und Quotientenkriterium benutzt.

Weihnachtsaufgabe 4: Auf einem Tisch einer Bar in Pisa wird ein Turm aus quadratischen, identischen Bierdeckeln errichtet. Sie werden übereinander gelegt, ohne Klebstoff o.ä. zu verwenden.

Wie weit kann ein so errichteter schiefer Turm maximal über die Tischkante hinausragen? Wieviele Bierdeckel werden benötigt (Schätzung)?

Weihnachtsaufgabe 5: Betrachte einen periodischen Kettenbruch

$$\alpha = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \cdots}}}}$$

mit Periode $p \in \mathbb{N}$, d.h. für alle $k \in \mathbb{N}$ gelte $a_{k+p} = a_k$. Zeige, dass α Lösung einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten ist:

$$b\alpha^2 + c\alpha + d = 0, \qquad b, c, d \in \mathbb{Z}.$$

Allgemein heißt ein Kettenbruch periodisch, falls die Folge a_k schließlich periodisch wird, d.h. falls die Periodizität ab einem Index $k_0 \in \mathbb{N}$ gegeben ist. Gilt die Behauptung auch für diese Kettenbrüche?

Hinweis: Zeige zunächst, dass

$$\alpha = \frac{p_n r_n + p_{n-1}}{q_n r_n + q_{n-1}}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $p_k, q_k \in \mathbb{N}$ und den Resten

$$r_n = a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \cdots}}$$

Weihnachtsaufgabe 6: Prüfe, ob folgende Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $\beta > 0$ konvergieren:

(i) $a_n = \dfrac{1}{(5 + (-1)^n)^n}$; (iii) $a_n = \dfrac{\beta^{2n}}{(1+\beta^2)^{n-1}}$; (v) $a_n = \mathrm{e} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

(ii) $a_n = (\sqrt[n]{\beta} - 1)^n$; (iv) $a_n = n^{-(1+\frac{1}{n})}$;

Weihnachtsaufgabe 7: Eine punktförmige Mathematik-Studentin will dem punktförmigen Vorlesungsassistent eine Frage zu einer Übungsaufgabe stellen. Da dieser Wohlordnung statt Totalordnung geschrieben hat und jetzt die Aufgabe nicht lösbar ist, rennt er davon. Leider ist er in einem kreisrunden Hörsaal $H = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ ohne Hindernisse (Tische, Stühle, Bananenschalen,...) gefangen. Beide können sich mit derselben Maximalgeschwindigkeit bewegen.

Gibt es eine Strategie für den Assistenten der Studentin zu entkommen?

Weihnachtsaufgabe 8: Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, \qquad \text{außerdem} \qquad \binom{\alpha}{0} := 1.$$

Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

absolut konvergiert, falls $|x| < 1$. Was passiert für $x = -1$ und $\alpha < 0$ bzw. $\alpha > 0$?
Freiwilliger Zusatz: Definiere $(1+x)^\alpha := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$, für $|x| < 1$, und zeige, dass dann $(1+x)^\alpha (1+x)^\beta = (1+x)^{\alpha+\beta}$.

Weihnachtsaufgabe 9: Prüfe folgende Folgen a_n auf Konvergenz und bestimme ggf. ihre Grenzwerte:

(i) $a_n = 10^{-n}(1 + 11 + 111 + 1111 + \cdots + \overbrace{111\cdots1}^{n \text{ Einsen}});$

(ii) $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n;$

(iii) $a_{n+1} = \dfrac{2 + a_n}{1 + a_n}$, mit $a_1 = 1$.

Weihnachtsaufgabe 10: [Farey-Sequenzen] Die Mediante zweier Brüche ist durch folgende „Additionsvorschrift“ definiert

$$\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \longmapsto \frac{a+c}{b+d}.$$

Beachte, dass die Darstellung rationaler Zahlen als Bruch nicht eindeutig ist. Die Mediante wird zu einer Funktion auf den Paaren positiver, rationaler Zahlen, wenn als Argumente nur gekürzte Brüche verwendet werden.

Die Farey-Sequenzen definieren sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \left(\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{1}\right)\\
F_2 &= \left(\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{1}\right)\\
F_3 &= \left(\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{1}\right)\\
F_4 &= \left(\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{1}\right)\\
F_5 &= \left(\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{1}{1}\right)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Allgemein ergibt sich die Sequenz F_{n+1} aus der Sequenz F_n indem überall

$$(*) \qquad \ldots, \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \ldots \qquad \text{durch} \qquad \ldots, \frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}, \ldots$$

ersetzt wird, sofern $b + d \leq n + 1$ ist. Die Nenner der Sequenz F_n sind also höchstens n.

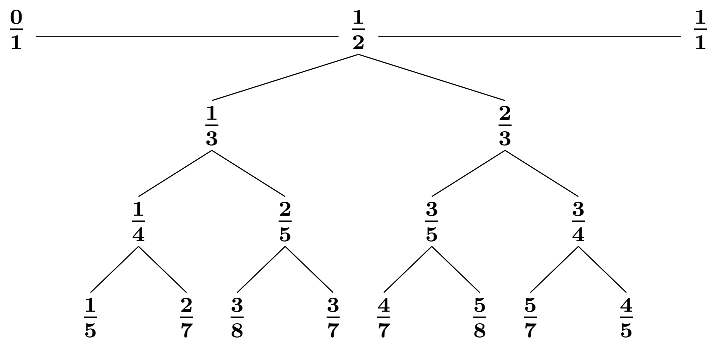
(i) Zeige, dass die Elemente jeder Farey-Sequenz der Größe nach geordnet sind.

(ii) Zeige, dass für benachbarte Elemente $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ von F_n stets gilt: $bc - ad = 1$.

(iii) Zeige mit (ii), dass alle durch $(*)$ erzeugten Brüche automatisch gekürzt sind.

Weihnachtsaufgabe 11: Zeige, dass die zuvor definierte Farey-Sequenz F_n alle gekürzten Brüche mit Nenner kleiner oder gleich n enthält.
Hinweis: Betrachte dazu einen gekürzten Bruch $\frac{m}{n}$ und die beiden Elemente $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ der Sequenz F_{n-1}, zwischen denen $\frac{m}{n}$ liegt. Zeige dann, dass $n = b + d$ und $m = a + c$.

Die Konstruktion kann auch als Farey-Baum dargestellt werden und liefert ein (bijektive) Abzählung der rationalen Zahlen im Intervall $[0, 1]$.



Was sind der kleinste und größte Nenner jeder Zeile?

Weihnachtsaufgabe 12: Annaliese spielt Spider-Woman. Zu gegebener Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ konstruiert sie ihr Netz auf folgende Weise:

(i) Zeichne den Graphen von f, d.h. die Kurve $\{(x,y)\ ;\ y = f(x)\}$

(ii) Zeichne den an der Winkelhalbierenden $\{x = y\}$ gespiegelten Graphen.

(iii) Starte bei einem beliebigen Punkt $(x_0, 0)$.

(iv) Ziehe eine vertikale Linie vom letzten Punkt zum Graphen von f.

(v) Ziehe eine horizontale Linie vom letzten Punkt zum gespiegelten Graphen.

(vi) Fahre bei (iv) fort.

Annalyx, der in der Vorlesung aufgepasst hat, schaut sich das an und schüttelt verzweifelt den Kopf.

(i) Zeichne Annalieses „Spinnennetz“ für $f(x) = \lambda x(1-x)$ und selbtgewählte Werte λ.

(ii) Begründe, dass die Konstruktion für allgemeines f beliebig lange fortgesetzt werden kann.

(iii) Welche Folge (x_n, y_n) von Punkten ergibt sich für gegebenen Anfangswert $(x_0, 0)$? Gibt es eine Rekursionsgleichung? Gibt es eine explizite Formel?

Freiwilliger Zusatz:

(iv) Was bedeuten Schnittpunkte des Graphen von f und seines Spiegelbildes?

Weihnachtsaufgabe 13: Betrachte die alternierende harmonische Reihe

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

die konvergent aber nicht absolut konvergent ist.

(i) Gib eine divergente Umordnung der Reihe an.

(ii) Gib eine Umordnung der Reihe an, die gegen 2008 konvergiert.

Freiwilliger Zusatz:

(iii) Zeige, dass die Umordnung, bei der sich stets ein positives und 2 negative Glieder abwechseln, genau den halben Wert der ursprünglichen Reihe hat:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + - - \cdots = \frac{s}{2}.$$