Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Bernold Fiedler, Bernhard Brehm

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 25.04.2013, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.

Aufgabe 1: Welche der folgenden Funktionenfolgen f_n konvergiert gleichmäßig? Bestimme die Grenzfunktion als punktweisen Grenzwert und prüfe auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Konvergieren auch die Ableitungen?

(i) $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^k$, auf dem Intervall $x \in [0,1)$ bzw. $x \in \left[\frac{2012}{2013}, \frac{2013}{2014}\right]$;

(ii) $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ für $x \in \mathbb{R}, |x| \leq C$;

(iii) $f_n(x) = n^{-\alpha} \sin(nx),\ x \in [0,1], \alpha \in \mathbb{R}_+$

(iv) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei k-mal stetig differenzierbare Funktionen. Zeige induktiv die Leibniz-Regel

$$(f \cdot g)^{(k)} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} f^{(\ell)} g^{(k-\ell)}$$

der k-ten Ableitung der Produktfunktion $f \cdot g$.

Aufgabe 3: Es sei $f : J \to \mathbb{R}$ auf dem offenen Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion. Weiter sei

$$0 = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a), \qquad 0 \neq f^{(k)}(a)$$

an einer Stelle $a \in J$. Für welche $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ hat f an der Stelle a ein lokales Extremum?

Aufgabe 4: [Abelscher Grenzwertsatz] Beweise folgenden Satz. Sei

$$S(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R = 1$. Außerdem sei

$$S(1) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

konvergent. Dann ist

$$S(1) \;=\; \lim_{x \to 1, |x|<1} S(x).$$

Bemerkung: Konvergiert eine Potenzreihe in $x = 1$, so muss ihr Wert an dieser Stelle also die stetige Fortsetzung der Werte auf dem Inneren des Einheitsintervalls sein.

Dieser Satz liefert z.B. aus der Arcustangens- und der Logarithmus-Reihe die Identitäten

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots \\ \log 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots \end{aligned}$$

Hinweis: Gehe wie folgt vor:

(i) Betrachte die Nullfolge

$$r_n \;=\; S(1) - \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Zeige, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt:

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} r_n x^n \right| \;<\; \frac{\varepsilon}{1 - |x|}.$$

(ii) Folgere daraus, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$R(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n$$

mindestens 1 ist. Also konvergiert die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ absolut.

(iii) Folgere daraus, dass

$$(x-1)R(x) \;=\; S(x) - S(1).$$

(iv) Zeige die Konvergenz

$$\lim_{x \to 1, |x|<1} (x-1)R(x) \;=\; \lim_{x \to 1, |x|<1} (x-1) \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n \;=\; 0$$

durch geeignete Zerlegung und Abschätzung der Summe.