Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Bernold Fiedler, Bernhard Brehm

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 02.05.2013, 14.00 Uhr

Aufgabe 5: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade* bzw. *ungerade*, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(-x) = f(x)$ bzw. $f(-x) = -f(x)$. Was kannst du über die Koeffizienten der Taylorpolynome aussagen?

Aufgabe 6: Konstruiere eine monoton wachsende, unendlich oft differenzierbare Funktion $\psi : \mathbb{R} \to [0,1]$, für die gilt:

$$\psi(x) = 0, \text{ für alle } x \leq 0 \qquad \text{und} \qquad \psi(x) = 1, \text{ für alle } x \geq 1.$$

Kann ψ ungerade sein?
Hinweis: Betrachte zum Beispiel die Funktion $\exp(-1/x^2)$.

Aufgabe 7: Zeige, dass die Parametrisierung $f : \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ des Einheitskreises $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ surjektiv ist. Für welche Teilintervalle von $\mathbb{R}$ ist die Parametrisierung bijektiv?

Zeige, dass die Parametrisierung $f : \mathbb{R} \to H_+ \subset \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (\cosh(t), \sinh(t))$ der rechten Hyperbelhälfte $H_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1, x > 0\}$ surjektiv ist. Für welche Teilintervalle ist die Parametrisierung bijektiv?

Welche Kurve ist durch $(\sin t, \cos 2t)$ parametrisiert? Zeichne die Kurve. Wie nennt man solche Kurven? Welcher Teil der Kurve ist parametrisiert?

Aufgabe 8: Betrachte die Funktion $f(x) = 1/(1+x)$. Berechne die Taylor-Entwicklungen von f um $x_0 = 0$ und $x_1 = 1/2$ und bestimme die Konvergenzradien R_0 und R_1 beider Taylorreihen.

Ein Theorem aus der Vorlesung besagt, dass $R_1 \geq R_0 - 1/2$. Warum ist der Konvergenzradius R_1 hier echt größer?