Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Bernold Fiedler, Bernhard Brehm

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 09.05.2013, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.
Bei den Aufgaben werden mit B_n die Bernoulli-Zahlen bezeichnet.

Aufgabe 9: Beweise **eine** der folgenden drei Taylor-Reihen:

(i) $x \coth x = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} \frac{B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$

(ii) $x \cot x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$

(iii) $\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}$

Dabei darf (i) für (ii) und (i),(ii) für (iii) benutzt werden. Falls mehr als eine Teilaufgabe gelöst ist, gibt es je einen Extrapunkt!

Hinweise Für (i) benutze $x/2 \coth(x/2) = x/(e^x - 1) + x/2$. Für (ii) setze imaginäre ix in (i) ein. Warum darf man das? Für (iii) berechne $x \tan x + 2x \cot 2x$.

Aufgabe 10: Für welche ungeraden Indices k gilt $B_k = 0$?

Aufgabe 11: Zeige, dass die Funktion

$$f(x) := \log \cos x$$

analytisch in einer Umgebung der 0 ist. Berechne dazu zunächst $f'(x)$ und benutze Aufgabe 9 (iii).

Aufgabe 12: Wikipedia ersetzt manchmal B_1 durch $+1/2$ in der Definition der Bernoulli-Zahlen. Beweise dann unter Benutzung der Vorlesung folgende Wikipedia-Behauptung für $\mathrm{S}_m(n) := 1^m + \cdots + n^m$ und $m \in \mathbb{N}$

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k \, n^{m+1-k}$$