Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Bernold Fiedler, Bernhard Brehm
http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 16.05.2013, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.

Aufgabe 13: Zeige, dass die Menge X aller beschränkten Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bezüglich der sup-Norm ein Banachraum ist.

Aufgabe 14: Beweise oder widerlege in normierten $\mathbb{R}$-Vektorräumen $X \neq 0$:

(i) Die Norm ist stetig;

(ii) Jeder abgeschlossene echte Unterraum von X ist ein Banachraum;

(iii) Kein echter Unterraum von X ist offen;

(iv) Jede beschränkte lineare Abbildung $A : X \to X$ ist Lipschitz-stetig;

Dabei heißt eine Menge offen, wenn sie mit jedem Punkt eine $\varepsilon-$Kugel drumherum enthält. Eine Abbildung A heißt (global) Lipschitz-stetig, wenn eine Lipschitz-Konstante λ existiert, so dass $|A(x) - A(y)| \leq \lambda |x - y|$ für alle x, y gilt.

Aufgabe 15: Berechne

$$\int_0^1 t^2 \, \mathrm{d}t$$

durch geeignete Approximation des Integranden $f(t) = t^2$ mit Treppenfunktionen.

Freiwilliger Zusatz: Bestimme analog für $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t.$$

Aufgabe 16: Sei $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ der Banachraum der stetigen Funktionen mit der sup-Norm. Die Abbildung $A : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $Af := f(a) - f(b)$. Zeige, dass A eine lineare, beschränkte Abbildung ist, und berechne $\|A\|$.