Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Bernold Fiedler, Bernhard Brehm

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 23.05.2013, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten. Im Folgenden bezeichnet Z stets einen Banachraum.

Aufgabe 17: Zeige: Ist $f : [a, b] \to Z$ eine Regelfunktion, so ist auch ihr Betrag $\|f\|$ eine Regelfunktion. (Dabei ist $\|f\|(x) := \|f(x)\|$.) Ferner gilt $\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|$.

Aufgabe 18: Beweise oder widerlege:

(i) Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktionen, so ist auch ihr Produkt fg eine Regelfunktion. (Dabei ist $(fg)(x) := f(x)g(x)$.)

(ii) Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktionen mit $g(x) \neq 0$, so ist auch ihr Quotient f/g eine Regelfunktion. (Dabei ist $(f/g)(x) := f(x)/g(x)$.)

(iii) Jede monotone Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Regelfunktion.

Aufgabe 19: Finde jeweils eine Folge von Regelfunktionen $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, die punktweise gegen eine Funktion f konvergiert, so dass

(i) f keine Regelfunktion ist;

(ii) f zwar eine Regelfunktion ist, aber

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 20: Beweise oder widerlege:

(i) Jede Funktion $f : [a, b] \to Z$ mit höchstens abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen ist eine Regelfunktion.

(ii) Jede Regelfunktion $f : [a, b] \to Z$ hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.