Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Bernold Fiedler, Bernhard Brehm

Abgabe: Donnerstag, 30.05.2013, 14.00 Uhr

Aufgabe 21: Berechne die unter dem Namen *Orthogonalitätsrelationen* bekannten Integrale für alle ganzen Zahlen k, l:

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(lx)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{2\pi} \sin(kx)\cos(lx)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(lx)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 22: Berechne vier der folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\ln x\,\mathrm{d}x;$

(ii) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x + \sin x};$

(iii) $\displaystyle\int \exp(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x;$

(iv) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x;$

(v) $\displaystyle\int x(\ln x)^n\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N};$

(vi) $\displaystyle\int t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{N}.$

Bitte nicht einfach (online oder in einer Formelsammlung) nachschlagen und differenzieren; ein Minimum an Herleitung ist erforderlich.

Aufgabe 23:

(i) Zeige, dass die Vereinigung abzählbar vieler Lebesgue-Nullmengen wieder eine Lebesgue-Nullmenge ist.

(ii) Starte mit dem Einheitsintervall $C_0 := [0,1]$. Schneide im n-ten Schritt aus jeder Komponente der Menge C_{n-1} das (offene) mittlere Drittel heraus, d.h. $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$, usw.

Die *Cantor-Menge* C ist definiert als der Durchschnitt

$$C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$$

der zuvor rekursiv definierten Mengen. Zeige, dass C eine überabzählbare Lebesgue-Nullmenge ist.

Aufgabe 24: Bestimme Stammfunktionen folgener Funktionen:

(i) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$;

(ii) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

(iii) $f(x) = \dfrac{3x^2+6x+2}{x(x+1)(x+2)}$;

(iv) $f(x) = \dfrac{1}{x(x+2)^2}$.

Bitte nicht einfach online oder in einer Formelsammlung nachschlagen und differenzieren; ein Minimum an Herleitung ist erforderlich.