Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Bernold Fiedler, Bernhard Brehm

Abgabe: Donnerstag, 06.06.2013, 14.00 Uhr

Aufgabe 25: Zeige, dass für jede einmal stetig differenzierbare Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{\omega\to\infty} \int_0^{2\pi} \sin(\omega x) f(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$

Freiwilliger Zusatz: Zeige oder widerlege, dass dies für jede Regelfunktion f gilt.

Freiwilliger Zusatz 2: Zeige oder widerlege, dass dies für jede Funktion $f \in L^1([0, 1])$ gilt.

Aufgabe 26: Konstruiere eine Folge von stetigen Funktionen $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^1} = 0,$$

aber für alle $x \in [0, 1]$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} |f_n(x)| = \infty.$$

Aufgabe 27: Seien f und g Abbildungen des Einheitsintervalls in sich, f sei stetig und g Riemann-integrierbar. Beweise oder widerlege:

(i) $f \circ g$ ist Riemann-integrierbar.

(ii) $g \circ f$ ist Riemann-integrierbar.

Aufgabe 28: Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert

$$\int_0^1 x^\alpha\, \mathrm{d}x$$

(i) als Regelintegral;

(ii) als Riemann-Integral;

(iii) als uneigentliches Riemann-Integral;

(iv) als Lebesgue-Integral?