Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Bernold Fiedler, Bernhard Brehm
http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 13.06.2013, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.

Aufgabe 29: Seien $f, g \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $n \geq 0$ periodische Funktionen mit Periode 2π, und bezeichne

$$c_k(f) \;:=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t$$

den k-ten Fourier-Koeffizienten von f.

(i) Zeige, dass für die Fourier-Koeffizienten der Ableitung $f^{(\ell)}, \ell \leq n$ gilt:

$$c_k(f^{(\ell)}) \;=\; (\mathrm{i}k)^\ell c_k(f).$$

(ii) Definiere die Faltung durch

$$(f \star g)(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Zeige, dass für die Fourier-Koeffizienten der Faltung $f \star g$ gilt:

$$c_k(f \star g) \;=\; c_k(f)c_k(g).$$

Hinweis: Begründe bei Vertauschung von Integralen, dass dies (hier) tatsächlich erlaubt ist.

Aufgabe 30: Zeige, dass die Reihe

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\sin((2k+1)t)/(2k+1)$$

die Fourierreihe der periodischen Fortsetzung der Rechteckschwingung ist:

$$f(t) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t \in [0, \pi) \\ -1 & \text{für} \quad t \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

Plotte die Partialsummen der Fourierreihe von f für $n = 5$, 50 und 150 Glieder, z.B. mit `Mathematica` oder `Matlab`. Gilt punktweise Konvergenz für alle t? Wie verhalten sich (numerisch) die Minima und Maxima der Partialsummen?

Aufgabe 31: Finde ein Gegenbeispiel zum Mittelwertsatz in höheren Dimensionen, d.h. eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung $f : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, so dass *kein* $\xi \in [a,b]$ existiert mit

$$f(b) - f(a) \;=\; (b-a) \cdot f'(\xi).$$

Freiwilliger Zusatz: Zeige, dass in $\mathbb{R}^2$ aber zumindest folgender „abgeschwächter Mittelwertsatz“ gilt: zu jeder $\mathcal{C}^1$-Abbildung $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(a) \neq f(b)$ existieren $\xi \in [a,b]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda \cdot (f(b) - f(a)) \;=\; f'(\xi).$$

Welche Werte λ sind möglich?

Aufgabe 32: Zeige, dass die Landau-Kerne $\varphi_n(x) := c_n(1-x^2)_+^n$ für geeignete c_n eine Dirac-Folge bilden.
Hinweis: Zeige zunächst dass $c_n \leq (n+1)/2$. Zeige ferner, dass für das Integral mit $0 < \delta < 1$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} \varphi_n(x)dx \leq 2c_n(1-\delta^2)^n(1-\delta)$$