Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Bernold Fiedler, Bernhard Brehm

Abgabe: Donnerstag, 20.06.2013, 14.00 Uhr

Aufgabe 33: Gegeben seien drei reelle Zahlen $1 < p, q, r < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. Zeige, dass für beliebige Regelfunktionen $f, g, h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ folgende Ungleichung gilt:

$$\int_0^1 |f(x)g(x)h(x)| \,\mathrm{d}x \;\leq\; \|f\|_{L^p} \, \|g\|_{L^q} \, \|h\|_{L^r}.$$

Freiwilliger Zusatz: Beweise die verallgemeinerte Hölder-Ungleichung: Für reelle Zahlen $1 < p, q, r < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ und Funktionen $f \in L^p([0, 1], \mathbb{R})$, $g \in L^q([0, 1], \mathbb{R})$ liegt fg in $L^r([0, 1], \mathbb{R})$ mit $\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \, \|g\|_{L^q}$.

Aufgabe 34: Betrachte folgende Folgen:

$$a_n \;:=\; \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \ln(n+1); \qquad\qquad b_n \;:=\; \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \ln n.$$

Zeige, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wächst und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fällt. Zeige außerdem, dass beide Folgen gegen denselben Grenzwert konvergieren. Diese wird auch *Euler-Mascheroni-Konstante* genannt.

Zusatz: In der Analysis I wurde folgende Frage (Aufgabe 37) gestellt:

> Ein Käfer will auf einen Bambus klettern. Da dieser nur einen Meter hoch ist, ist der Käfer frohen Mutes und macht sich auf den Weg. Er klettert jeden Tag einen Zentimeter. Was er nicht weiß ist, dass Bambus nachts einen Meter wächst. Das Wachstum ist gleichmäßig auf den ganzen Bambus verteilt. Kommt der Käfer jemals oben an?

Nach aktuellen Schätzungen ist das Alter des Universums kürzer als 14 Milliarden Jahre. Kann der Käfer heute schon auf seiner Aussichtsplattform angekommen sein? Betrachte die Graphik auf folgender Seite:

http://en.wikipedia.org/wiki/Graphical_timeline_from_Big_Bang_to_Heat_Death

Falls diese Angaben ungefähr stimmen, wie stehen die Chancen des Käfers, noch einen Sternenhimmel zu sehen, wenn er seinen Bambus erklommen hat?

Aufgabe 35: Zeige, dass (korrekt skaliert) die Asymptotik allgemeiner Binomialkoeffizienten durch die Gaußsche Glockenkurve gegeben ist, d.h. zu gegebenem festen $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \binom{2n}{n + [\sqrt{n}x]} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

Hierbei ist $[y] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq y\}$ die Abrundungsfunktion.

Erinnerung (Stirlingformel):

$$\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} < n! < \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{1}{12(n-1)}}$$

Aufgabe 36: Benutze die Treppenfunktionen und das Ergebnis der vorigen Aufgabe und beweise:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$