Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Bernold Fiedler, Bernhard Brehm

Abgabe: Donnerstag, 27.06.2013, 14.00 Uhr

Aufgabe 37: Bestimme für folgende Mengen M jeweils Inneres, Rand und Abschluss im Raum E mit Metrik d.

(i) $M = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \,;\, n, m \in \mathbb{N} \right\}, \quad E = \mathbb{R}, \quad d(x,y) = |x-y|;$

(ii) $M = \bigcup_{n \geq 1} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right), \quad E = \mathbb{R}, \quad d(x,y) = |x-y|;$

(iii) $M = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, \quad E = \mathbb{R}^2, \quad d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}.$

Aufgabe 38: Sei (E,d) ein metrischer Raum und $B \subseteq A \subseteq E$. Zeige:

(i) B ist offen in A genau dann, wenn $\tilde{B} \subseteq E$ existiert, so dass $\tilde{B}$ offen in E ist und $B = A \cap \tilde{B}$;

(ii) B ist abgeschlossen in A genau dann, wenn $\tilde{B} \subseteq E$ existiert, so dass $\tilde{B}$ abgeschlossen in E ist und $B = A \cap \tilde{B}$.

Aufgabe 39: Sei E ein metrischer Raum und $A \subseteq E$ eine Teilmenge. Beweise oder widerlege

(i) $\mathring{A} = \mathring{\mathring{A}};$

(ii) $\mathring{\overline{A}} = \overline{\mathring{A}};$

(iii) $\overline{E \setminus \mathring{A}} = E \setminus \overline{A};$

(iv) $\overline{E \setminus A} = E \setminus \mathring{A}.$

Aufgabe 40: Sei E ein Raum mit beschränkter Metrik $d \leq 1$.

(i) Zeige, dass für alle $x \in E$ und $A \subseteq E$ gilt:

$$0 \;=\; d(x, A) \;:=\; \inf_{a \in A} d(x, a) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \overline{A}.$$

(ii) Zeige, dass die Menge $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ aller nichtleeren Teilmengen von E versehen mit dem symmetrischen Hausdorff-Abstand

$$d_H(A, B) \;:=\; \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B),\, \sup_{b \in B} d(b, A) \right\}$$

allgemein *kein* metrischer Raum ist.

(iii) Zeige, dass die abgeschlossenen Teilmengen

$$\mathcal{A}(E) \;:=\; \{\, A \subseteq E \;;\; A \text{ abgeschlossen und nicht leer} \,\}$$

zusammen mit dem Hausdorff-Abstand hingegen einen metrischen Raum bilden.