Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Bernold Fiedler, Bernhard Brehm

Abgabe: Donnerstag, 04.07.2013, 14.00 Uhr

Durch Lösung von mehr als vier Aufgaben können zusätzliche Punkte erzielt werden, die nicht zur Pflicht zählen.

Aufgabe 41: Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Zeige, dass J (bzgl. der Standard-Metrik auf $\mathbb{R}$) zusammenhängend ist.

Aufgabe 42: *Cantormengen* sind nichtleere, vollständige, total unzusammenhängende (d.h. alle Zusammenhangskomponenten sind einelementig), perfekte (d.h. $x \in \overline{C \setminus \{x\}}$ für alle $x \in C$) Mengen. Betrachte Cantormengen in $[0,1]$ bezüglich der Standardmetrik auf $\mathbb{R}$. Beweise oder widerlege:

(i) Endliche Vereinigungen von Cantormengen sind wieder Cantormengen.

(ii) Abzählbare Vereinigungen von Cantormengen sind wieder Cantormengen.

(iii) Der Durchschnitt zweier Cantormengen ist entweder leer oder wieder eine Cantormenge.

Aufgabe 43: Betrachte Cantormengen in $[0,1]$ wie in der vorherigen Aufgabe. Beweise oder widerlege:

(i) Jede Cantormenge ist Lebesgue-Nullmenge.

(ii) Das Komplement einer Cantormenge kann keine Lebesgue-Nullmenge sein. (Cantormengen haben niemals „volles Maß.“)

(iii) Jede unendliche, abgeschlossene und total unzusammenhängende Menge $A \subset [0,1]$ ist überabzählbar.

(iv) Jede Cantormenge ist überabzählbar.

(v) Jede nichtleere, vollständige, perfekte Menge $A \subset [0,1]$ ist überabzählbar.

Aufgabe 44: Zeige, dass folgende Aussage äquivalent zum Baireschen Kategoriensatz der Vorlesung ist: Sei X ein vollständiger metrischer Raum, der sich als Vereinigung

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

abzählbar vieler abgeschlossener Mengen $A_k \subseteq X$ schreiben lässt. Dann besitzt wenigstens eine dieser Mengen A_k ein nichtleeres Inneres.

Bemerkung: Abgeschlossene Mengen mit leerem Inneren heißen auch *nirgends dicht.* Teilmengen abzählbarer Vereinigungen nirgends dichter Mengen heißen *mager*, oder von *1. Baire-Kategorie.* Sie sind die genau die Komplemente generischer Mengen, also von Mengen *2. Baire-Kategorie.*

Aufgabe 45: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Abbildung. Beweise oder widerlege:

(i) Sind die Bilder beliebiger zusammenhängender Mengen wieder zusammenhängend, so ist f stetig.

(ii) Sind die Bilder beliebiger kompakter Mengen wieder kompakt, so ist f stetig.

(iii) Sind die Bilder beliebiger zusammenhängender Mengen wieder zusammenhängend und die Bilder beliebiger kompakter Mengen wieder kompakt, so ist f stetig.

Aufgabe 46: Betrachte folgende Variante des „Spiels von Banach-Mazur“, das wir noch aus der Analysis I kennen: Analiese und Analyx konstruieren gemeinsam eine reelle Zahl $z \in [0, 1]$. Zunächst einigen sich beide auf eine Menge $M \subseteq [0, 1]$. Dann beginnt Analiese durch Wahl eines beliebigen Intervalls $[a_1, b_1] \subset [0, 1]$. Nun wählen Analyx und Analiese abwechselnd Intervalle $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$ der Länge $b_n - a_n < n^{-1}$. Diese Intervallschachtelung definiert eindeutig eine reelle Zahl

$$\{z\} := \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Analiese gewinnt, falls z in der zuvor festgelegten Menge liegt, d.h. falls $z \in M$. Ansonsten ist Analyx der Sieger.

Besitzt Analiese eine Gewinnstrategie, falls M von zweiter Baire-Kategorie ist, d.h. den Durchschnitt abzählbar vieler offener und dichter Mengen enthält? Besitzt Analyx eine? Was passiert, falls M eine magere Menge (d.h. Komplement einer Menge von zweiter Baire-Kategorie; siehe auch Aufgabe 44) ist?

Aufgabe 47: Sei X ein metrischer Raum und $(K_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine geschachtelte Folge nichtleerer Teilmengen, $K_{\ell+1} \subseteq K_\ell \subseteq X$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$. Beweise oder widerlege:

(i) Sind alle K_ℓ kompakt, so ist ihr Schnitt nicht leer, $\bigcap_{\ell\in\mathbb{N}} K_\ell \neq \emptyset$.

(ii) Sind alle K_ℓ abgeschlossen, so ist ihr Schnitt nicht leer, $\bigcap_{\ell\in\mathbb{N}} K_\ell \neq \emptyset$.

Aufgabe 48: Seien E und F metrische Räume und $f : E \to F$ stetig und bijektiv. Sei ferner E kompakt. Beweise, dass dann f ein Homöomorphismus ist, d.h. eine stetige Umkehrung $f^{-1} : F \to E$ besitzt.

Aufgabe 49: Sei X ein normierter Vektorraum mit induzierter Metrik $d(x,y) := |x-y|$. Beweise, dass durch

$$d_{\mathrm{B}}(x,y) \;:=\; \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

eine *beschränkte* Metrik auf X definiert wird, $d_{\mathrm{B}} \leq 1$. Beweise ferner, dass d_{B} und d äquivalente Metriken sind.

Aufgabe 50: Betrachte die Menge $\mathcal{M}(n,n)$ der reellen $(n \times n)$-Matrizen, die durch Identifizierung mit $\mathbb{R}^{n^2}$ zu einem vollständigen metrischen Raum wird. Beweise:

(i) Die Abbildung

$$\det \;:\; \mathcal{M}(n,n) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad A \longmapsto \det A,$$

die jeder Matrix ihre Determinante zuordnet, ist stetig.

(ii) Die Menge

$$\{\; A \in \mathcal{M}(n,n) \mid \det A \neq 0 \;\} \;\subseteq\; \mathcal{M}(n,n)$$

der regulären Matrizen ist offen und dicht in $\mathcal{M}(n,n)$.

Aufgabe 51: Zeige, dass es auf R^n bis auf Äquivalenz nur eine Norm gibt, d.h. zu je zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf R^n existiert eine Konstante $C > 1$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$C^{-1}\|x\|_1 \;\leq\; \|x\|_2 \;\leq\; C\|x\|_1.$$

Aufgabe 52: Gib zwei äquivalente Metriken d_1, d_2 auf dem offenen Intervall $I = (0,1)$ an, so dass (I, d_1) ein vollständiger metischer Raum ist, (I, d_2) jedoch nicht.

Aufgabe 53: Wir betrachten die Banachräume

$$BC^0([0,1],\mathbb{R}), \qquad \|f\|_{C^0} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

$$BC^1([0,1],\mathbb{R}), \qquad \|f\|_{C^1} = \|f\|_{C^0} + \|f'\|_{C^0}$$

Bestimme den Abschluss der BC^1-Einheitssphäre $S = \{f \in BC^1([0,1],\mathbb{R}) : \|f\|_{C^1} = 1\}$ in $BC^0([0,1],\mathbb{R})$.