

Kernfragen zur Analysis

VI. Metrische Räume

1. Was ist eine Metrik? Gib drei verschiedene Beispiele!
2. Wie sind offene Teilmengen eines metrischen Raumes definiert, wie abgeschlossene Teilmengen?
3. Sind $\left\{ \begin{array}{l} \text{endliche} \\ \text{abzählbare} \\ \text{beliebige} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Durchschnitte} \\ \text{Vereinigungen} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{offener} \\ \text{abgeschlossener} \end{array} \right\}$ Mengen wieder offen bzw. abgeschlossen?
4. Wie sind Abschluss, Inneres und Rand einer Teilmenge eines metrischen Raumes definiert?
5. Was sind Abschluss, Inneres und Rand folgender Teilmengen der reellen Zahlen (mit der Standardmetrik)?

$$\mathbb{Z}; \quad \mathbb{Q}; \quad \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right).$$

6. Wann ist eine Teilmenge eines metrischen Raumes dicht?
7. Wann ist ein metrischer Raum zusammenhängend? Gib außerdem je ein Beispiel eines zusammenhängenden und eines nicht zusammenhängenden Raumes!
8. Sind $\left\{ \begin{array}{l} \text{endliche} \\ \text{abzählbare} \\ \text{beliebige} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Durchschnitte} \\ \text{Vereinigungen} \end{array} \right\}$ zusammenhängender Mengen wieder zusammenhängend?
9. Unter welcher hinreichenden Zusatzbedingung sind beliebige Vereinigungen zusammenhängender Mengen wieder zusammenhängend? Gib ein Gegenbeispiel, falls die Zusatzbedingung nicht erfüllt ist.
10. Wie sind Zusammenhangskomponenten eines metrischen Raumes definiert?
11. Wann ist ein metrischer Raum kompakt?
12. Wann heißt eine Folge in einem metrischen Raum konvergent? Wann heißt sie Cauchy-Folge?
13. Warum ist in einem metrischen Raum jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge? (Beweis!)
14. Wann heißt ein metrischer Raum vollständig?
15. Wie lautet der Satz von Baire?

16. Was sind generische Mengen?
17. Wann heißt eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen zwei metrischen Räumen stetig? Gib wenigstens 2 verschiedene (aber natürlich äquivalente) Definitionen!
18. Wann heißt eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen zwei metrischen Räumen gleichmäßig stetig?
19. Wann heißen zwei Metriken äquivalent?
20. Was bedeutet die Äquivalenz durch Normen induzierter Metriken für diese Normen?
21. Sei X ein metrischer Raum. Formuliere und beweise den Zwischenwertsatz für stetige Abbildungen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.
22. Sind unter einer stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen zwei metrischen Räumen die $\left\{ \begin{array}{l} \text{Bilder} \\ \text{Urbilder} \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{offener} \\ \text{abgeschlossener} \\ \text{zusammenhängender} \end{array} \right\}$ Teilmengen wieder $\left\{ \begin{array}{l} \text{offen} \\ \text{abgeschlossen} \\ \text{zusammenhängend} \end{array} \right\}$?
23. Sind $\left\{ \begin{array}{l} \text{endliche} \\ \text{abzählbare} \\ \text{beliebige} \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Durchschnitte} \\ \text{Vereinigungen} \end{array} \right\}$ kompakter Mengen wieder kompakt?
24. Was versteht man unter einer Cantor-Menge? Gib ein Beispiel an!
25. Wann heißt ein metrischer Raum total unzusammenhängend?
26. Was sind magere Mengen?
27. Wann ist ein metrischer Raum kompakt? Gib wenigstens 2 verschiedene (aber natürlich äquivalente) Definitionen! Gib außerdem je ein Beispiel eines kompakten und eines nicht kompakten Raumes!
28. Sind unter einer stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen zwei metrischen Räumen die $\left\{ \begin{array}{l} \text{Bilder} \\ \text{Urbilder} \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{kompakter} \\ \text{vollständiger} \\ \text{beschränkter} \end{array} \right\}$ Teilmengen wieder $\left\{ \begin{array}{l} \text{kompakt} \\ \text{vollständig} \\ \text{beschränkt} \end{array} \right\}$?
29. Sind unter einer gleichmäßig stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen zwei Räumen die $\left\{ \begin{array}{l} \text{Bilder} \\ \text{Urbilder} \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{kompakter} \\ \text{vollständiger} \\ \text{beschränkter} \end{array} \right\}$ Teilmengen wieder $\left\{ \begin{array}{l} \text{kompakt} \\ \text{vollständig} \\ \text{beschränkt} \end{array} \right\}$?
30. Wie lassen sich die kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^n charakterisieren?
31. Wann heißt eine Familie $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ von Abbildungen zwischen metrischen Räumen gleichgradig stetig?
32. Wie lautet der Satz von Arzela-Ascoli?
33. Wie lautet der Banachsche Fixpunktsatz?