Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Bernold Fiedler, Bernhard Brehm

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Freitag, 03.05.2013, 14.00 Uhr

Nur bearbeitete Aufgaben werden besprochen. Keine der Aufgaben zählt zum Aufgaben-Soll. Erreichte Punkte werden aber trotzdem positiv angerechnet und können auch ein früheres Minus ausgleichen.

Aufgabe 1: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \;\leq\; \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Dies bedeutet, dass der Graph von f unterhalb aller seiner Sehnen verläuft.

Zeige, dass jede konvexe Funktion stetig ist.

Hinweis: Nimm indirekt an, es gäbe eine Unstetigkeitsstelle. Finde dann in der Nähe eine Sehne, die nicht oberhalb des Graphen liegt.

Aufgabe 2: Berechne

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan x) - \tan(\sin x)}{\arcsin(\arctan x) - \arctan(\arcsin x)}.$$

Aufgabe 3: Betrachte die Zacken-Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \left| x - \left[x + \frac{1}{2} \right] \right|,$$

wobei die Gauss-Klammer $[y]$ wieder die größte ganze Zahl kleiner oder gleich y bezeichnet. Die Funktion g ist periodisch, $g(x+1) = g(x)$, sowie auf $\mathbb{R} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ differenzierbar. Bilde nun die Summe

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} g(2^k x).$$

Zeige, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **überall stetig aber nirgends differenzierbar** ist.

Hinweis: Zu gegebenem x_0 betrachte die Folgen $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\underline{x}_n \;:=\; 2^{-n}[2^n x_0], \qquad \overline{x}_n = \underline{x}_n + 2^{-n}.$$

Insbesondere gilt $\underline{x}_n \leq x_0 \leq \overline{x}_n$. Zeige dann, dass die Differenzenquotienten

$$\frac{g(2^k \overline{x}_n) - g(2^k \underline{x}_n)}{2^k(\overline{x}_n - \underline{x}_n)}$$

nur Werte ± 1 für $k < n$ bzw. 0 für $k \geq n$ annehmen. Zeuge nun, dass die Annahme der Differenzierbarkeit von f in x_0 im Widerspruch zu (i) steht.

Aufgabe 4: Betrachte den Raum $\mathcal{BC}^1(I,\mathbb{R})$ der stetig differenzierbaren Funktionen auf dem kompakten Intervall $I=[-1,1]$. Definiere Normen

$$\|f\|_1 = |f'(0)| + \sup_{x\in I} |f(x)|, \qquad \|f\|_2 = |f(0)| + \sup_{x\in I} |f'(x)|.$$

Zeige, dass dies tatsächlich Normen definiert. Bezüglich welcher dieser Normen ist $\mathcal{BC}^1(I,\mathbb{R})$ vollständig?

Aufgabe 5: Wir wollen für $f(x) = x + \sin x \cos x$ und $g(x) = f(x)\exp(-\sin x)$ den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

bestimmen. Dazu berechnet Annalyx

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2\cos x}{2\cos x - x - \sin x \cos x}\exp(\sin x).$$

Offenbar konvergiert die rechte Seite gegen 0, falls $x\to\infty$. Andererseits sagt Annaliese, dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \exp(\sin x)$$

für $x\to\infty$ (genauso offenbar) keinen Grenzwert hat. Was ist hier falsch?

Aufgabe 6: Konstruiere eine monoton wachsende, unendlich oft differenzierbare Funktion $\psi:\mathbb{R}\to[0,1]$, für die gilt:

$$\psi(x) = 0, \text{ für alle } x\le 0 \qquad \text{und} \qquad \psi(x) = 1, \text{ für alle } x\ge 1.$$

Hinweis: Betrachte zum Beispiel die Funktion $\exp(-1/x^2)$.

Aufgabe 7: Bestimme geeignete natürliche Zahlen N_1, N_2, N_3, N_4, so dass folgende Ausdrücke definiert sind. Bestimme dann alle $\alpha \geq 1$, für die die folgenden Reihen konvergieren.

(i) $\displaystyle\sum_{n=N_1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=N_2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=N_3}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)^\alpha}$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=N_4}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)(\log\log\log n)^\alpha}$

Aufgabe 8: Seinen I, J abgeschlossene, beschränkte Intervalle. Betrachte zwei gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen,

$$\begin{aligned} f, f_n &: I \to J, & \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{BC}(I,\mathbb{R})} &= 0, \\ g, g_n &: J \to \mathbb{R}, & \lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_{\mathcal{BC}(J,\mathbb{R})} &= 0, \end{aligned}$$

mit stetigen f_n und g_n. Beweise, dass dann auch die Verkettungen $g_n \circ f_n$ gleichmäßig gegen $g \circ f$ konvergieren.

Freiwilliger Zusatz: Finde ein Gegenbeispiel mit unbeschränkten Intervallen I, J.