Klausur

# Analysis II

Bernold Fiedler

09.07.2013

Bitte auf **allen** abgegebenen Zetteln den Namen vermerken!
Grundsätzlich sind alle Behauptungen zu begründen.
Dieses Blatt muss nicht abgegeben werden; Abgabe des Deckblattes ist erforderlich!

**Aufgabe 1 (1 Punkt):** Wie lauten die Taylor-Reihen folgender Funktionen in $x_0 = 0$?

$$(1+x)^\alpha, \qquad \log(1+x)$$

**Aufgabe 2 (1 Punkt):** Welchen elementaren Funktionen entsprechen folgende unbestimmte Integrale?

$$\int \sin t \,\mathrm{d}t; \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x}; \qquad \int \sqrt[n]{x+1}\,\mathrm{d}x; \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}; \qquad \int x^\alpha \,\mathrm{d}x, \quad \text{für } \alpha \neq -1.$$

**Aufgabe 3 (1 Punkt):** Was sind uneigentliche Integrale?

**Aufgabe 4 (1 Punkt):** Für welche reellen Exponenten $\alpha$ konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x$, für welche das uneigentliche Integral $\int_1^\infty x^\alpha \,\mathrm{d}x$?

**Aufgabe 5 (1 Punkt):** Wie lauten die Regeln für partielle Integration und Substitution? Gib außerdem jeweils ein nichttriviales Beispiel an.

**Aufgabe 6 (1 Punkt):** Wie sind Abschluss, Inneres und Rand einer Teilmenge eines metrischen Raumes definiert?

**Aufgabe 7 (1 Punkt):** Wann ist ein metrischer Raum kompakt? Gib wenigstens 2 verschiedene (aber natürlich äquivalente) Definitionen! Gib außerdem je ein Beispiel eines kompakten und eines nicht kompakten Raumes!

**Aufgabe 8 (1 Punkt):** Sind unter einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen die Bilder zusammenhängender Mengen wieder zusammenhängend? Sind unter einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen die Urbilder zusammenhängender Mengen wieder zusammenhängend?
*(Beweise oder widerlege!)*

**Aufgabe 9 (4 Punkte):** Konstruiere eine monoton wachsende, unendlich oft differenzierbare Funktion $\psi : \mathbb{R} \to [0, 1]$, für die gilt:

$$\psi(x) = 0 \text{ für alle } x \leq 0 \quad \text{und} \quad \psi(x) = 1 \text{ für alle } x \geq 1.$$

*Hinweis:* Betrachte zum Beispiel die Funktion $\exp(-1/x^2)$.
*(Beweise, dass die Konstruktion die gewünschten Eigenschaften besitzt, sofern dies nicht offensichtlich ist!)*

**Aufgabe 10 (4 Punkte):** Konstruiere jeweils eine Folge von Regelfunktionen $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, welche punktweise gegen eine Funktion $f$ konvergieren, sodass

(i) $f$ keine Regelfunktion ist;

(ii) $f$ zwar eine Regelfunktion ist, aber

$$\int_0^1 f(x) \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, \mathrm{d}x$$

*(Beweise, dass die Konstruktion die gewünschten Eigenschaften besitzt, sofern dies nicht offensichtlich ist!)*