Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Bernold Fiedler, Hannes Stuke

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Mittwoch, 30.10.2013, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.

Aufgabe 1: Es sei $f : X \to Y$ differenzierbar, X, Y sind normierte Räume.

(i) Zeige, dass die Differenzierbarkeit unabhängig von der Wahl äquivalenter Norm ist.

(ii) Beweise oder widerlege die Aussage für nicht äquivalente Normen.

Aufgabe 2: Seien X, Y_ℓ, $1 \leq \ell \leq m$, Banachräume. Zeige dass

$$f = (f_1, \dots, f_m) \,:\, X \longrightarrow Y_1 \times \cdots \times Y_m, \qquad x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

in $x = x_0$ genau dann differenzierbar ist, wenn die Funktionen $f_\ell : X \to Y_\ell$ für alle $1 \leq \ell \leq m$ in x_0 differenzierbar sind. Zeige ferner, dass die Ableitung dann durch

$$Df(x_0) \,:\, X \longrightarrow Y_1 \times \cdots \times Y_m, \qquad h \longmapsto (Df_1(x_0)h, \dots, Df_m(x_0)h)$$

gegeben ist.

Hinweis: Versehe $Y_1 \times \cdots \times Y_m$ z.B. mit der Norm $\|(y_1, \dots, y_m)\| = \max\{\|y_1\|, \dots, \|y_m\|\}$.

Aufgabe 3:

(i) Sei $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Definiere die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als Auswertung von f auf der Diagonalen:

$$g(x) \;:=\; f(x,x).$$

Zeige, dass g ebenfalls differenzierbar ist mit

$$[Dg(x)]h \;=\; [Df(x,x)](h,h) \;=\; [\partial_1 f(x,x) + \partial_2 f(x,x)]h.$$

(ii) Betrachte die Funktion

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

Berechne die partiellen Ableitungen von f in allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sowie die Ableitung der entsprechend (i) definierten Funktion $g(x) = f(x,x)$ in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$. Erkläre, was im Nullpunkt passiert.

Freiwilliger Zusatz: Verallgemeinere die Aussage (i) auf Funktionen $f : X \times \cdots \times X \to Y$ und Banachräume X, Y. Beweise die verallgemeinerte Aussage.

Aufgabe 4: Betrachte die Funktionen:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t^3, t^2)$$

und

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto (x^2+y^2)^\alpha$$

(i) Für welche α existiert die Ableitung von g?

(ii) Benutze die Kettenregel um die Ableitung von $g \circ f$ zu berechnen.

(iii) Setze nun zuerst f in g ein und berechne die Ableitung.

(iv) Was fällt auf und erkläre die Unterschiede.