Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Bernold Fiedler, Hannes Stuke
http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Mittwoch, 06.11.2013, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.

Aufgabe 5: Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x,y) \longmapsto (x^2+y^2)^2 - 3x(x^2+y^2) + 2x^2.$$

Zeige, dass f auf jeder Geraden durch den Ursprung ein lokales Minimum im Ursprung besitzt. Zeige aber auch, dass f in $(0,0)$ kein lokales Minimum besitzt.

Aufgabe 6: Sei X ein Banachraum. Betrachte $A \in L(X)$ mit $\|A\| < 1$. Beweise die folgende Darstellung von $(\mathrm{Id} - A)^{-1}$:

$$(\mathrm{Id} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

Beweise dazu die folgenden Schritte:

(i) Formuliere das Cauchy-Konvergenz Kriterium für $L(X)$.

(ii) Zeige die Konvergenz der obigen Reihe.

(iii) Zeige durch Multiplikation mit $(I - A)$, dass sie wirklich die Inverse darstellt.

Aufgabe 7: [Variation der Konstanten] Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige und beschränkte Funktion. Zeige, dass die durch

$$x(t) \;:=\; \int_0^t \exp[a(t-s)] f(s)\,\mathrm{d}s$$

gegebene Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) \;=\; a x(t) + f(t)$$

zum Anfangswert $x(0) = 0$ löst.
Freiwilliger Zusatz: Wie sieht die Variation der Konstanten Formel für $a(t) \in M(n)$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig und beschränkt aus.

Aufgabe 8: Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert als:

$$(x, y) \mapsto x^2 y^4$$

und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Berechne den Gradienten $\nabla(f \circ A)(x)$.

(ii) Zeige, dass für allgemeine stetig differenzierbare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und Matrizen $A \in L(\mathbb{R}^n)$ gilt: $\nabla(f \circ A) = A^t(\nabla f)(Ax)$.

(iii) Sei A orthogonal und $n = 2$. Dann ist $f \circ A$ die Funktion f in gedrehten Koordinaten. Leuchtet das Resultat (ii) unmittelbar ein?