Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Bernold Fiedler, Hannes Stuke

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Mittwoch, 13.11.2013, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.

Aufgabe 9: Gegeben seien k Punkte $p^{(1)}, \dots, p^{(k)} \in \mathbb{R}^N$. Bestimme den Punkt $x \in \mathbb{R}^N$, der die Summe der Quadrate der euklidischen Abstände

$$\sum_{i=1}^{k} \|x - p^{(i)}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{N} \left(x_j - p_j^{(i)} \right)^2$$

minimiert.

Aufgabe 10: Beweise den impliziten Funktionensatz (ohne die Differenzierbarkeit von $x(\lambda)$) unter den folgenden Voraussetzungen:

(i) $f \in C^0(\Lambda \times U, Y)$, $x_0 \in U \subset X$, $\lambda_0 \in \Lambda \subset \underline{\Lambda}$, $X, Y, \underline{\Lambda}$ sind Banachräume und U, Λ offen.

(ii) $f(\lambda_0, x_0) = 0$

(iii) $f_x(\lambda_0, x_0)$ ist beschränkt invertierbar.

(iv) $f_x \in C(\Lambda \times U, L(X, Y))$

Hinweis: Betrachte die Abbildung:

$$F(\lambda, x) := x - (f_x(\lambda_0, x_0))^{-1} f(\lambda, x)$$

Aufgabe 11: Sei A_0 eine reelle $n \times n$ - Matrix mit $\det A_0 \neq 0$. Zeige, dass die Inversion:

$$\mathrm{inv}(A) := A^{-1}$$

welche A die Inverse Matrix A^{-1} zuordnet differenzierbar in A_0 mit Ableitung

$$\mathrm{inv}'(A_0) H = -A_0^{-1} H A_0^{-1}$$

ist.

Freiwilliger Zusatz Was sind die höheren Ableitungen der Inversion?

Aufgabe 12: Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ so oft differenzierbar wie nötig und A eine reelle $n \times n$ Matrix. Die *Divergenz* von g ist definiert als:

$$(\operatorname{div}_x g)(x) := \operatorname{spur}(Dg(x))$$

Beweise oder widerlege:

(i) $\operatorname{div}_x (Ag(x)) = \operatorname{spur}(Dg(x)\, A)$

(ii) $\operatorname{div}_x (Ag(x)) = \operatorname{div}_x (g(Ax))$

Der *Laplace-Operator* Δf ist wie folgt definiert:

$$\Delta_x f = \operatorname{div}_x (\nabla f)$$

Beweise oder widerlege:

$$\Delta_x (f(Ax)) = (\Delta_x f)(Ax)$$

Freiwilliger Zusatz: Sei $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ orthogonal, sprich $AA^T = \mathrm{Id}$. Zeige, dass gilt:

$$\Delta_x (f(Ax)) = (\Delta_x f)(Ax)$$