Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Bernold Fiedler, Hannes Stuke
http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Mittwoch, 20.11.2013, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.

Aufgabe 13: Bei der Einführung des Integrals einer Funktionen $f \in C(Q, \mathbb{R})$, Q bezeichnet den n - dimensionalen Einheitswürfel $[0,1]^n$, wurden die folgende Funktionen definiert:

$$F_1(x_2, ..., x_n) := \int_0^1 f(x_1, ..., x_n)\, dx_1$$

und falls $2 \leq i \leq n-1$

$$F_i(x_{i+1}, ..., x_n) := \int_0^1 F_{i-1}(x_i, ..., x_n)\, dx_i$$

Zeige, dass die F_i stetig sind.

Aufgabe 14: Es seien $U \subset X, V \subset Y$ offene Teilmengen der Banachräume X, Y. Betrachte zwei Funktionen:

$$g \in C^2(U, V), \ f \in C^2(V, Z)$$

Z ist ein Banachraum. Leite eine Formel für die zweite Ableitung der Funktion:

$$h : U \to Z, \ x \mapsto (f \circ g)(x)$$

her. Erläutere die Terme (Definitionsgebiet, Bildraum, linear, multilinear, ...) und wie diese von x abhängen (stetig, differenzierbar, ...)

Aufgabe 15: Sei $f(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Zeige, dass gilt:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dxdy \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dydx$$

Warum ist der aus der Vorlesung bekannte Satz über die Vertauschbarkeit der Integrale hier nicht anwendbar?

Aufgabe 16: Es sei A eine symmetrische, reelle $N \times N$ - Matrix. Zeige, dass ein lokales Maximum ξ der Funktion

$$f : S^{N-1} \to \mathbb{R}, \ z \mapsto z^T A z$$

ein Eigenvektor von A ist, sprich dass ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$A\xi = \lambda\xi$$

Gehe dazu wie folgt vor:

(i) Beschreibe S^{N-1} durch eine Gleichung $g(x_1, ..., x_N) = 0$

(ii) Nimm o. b. d. A. an, dass das Maximum $\xi = e_N$ ist. Zeige, dass der implizite Funktionensatz anwendbar ist, so dass eine Funktion $\gamma : B_\epsilon(0) \subset \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ für ein $\epsilon > 0$ existiert und $g(x_1, ..., x_{N-1}, \gamma(x_1, ..., x_{N-1})) = 0$ gilt. Beweise $D\gamma|_{x_1 = ... = x_{N-1} = 0} = 0$.

(iii) Betrachte die Funktion $\bar{f}(x_1, ..., x_{N-1}) = f(x_1, ..., x_{N-1}, \gamma(x_1, ..., x_{N-1}))$.

(iv) Wie lautet die Bedingung für ein lokales Maximum dieser Funktion? Zeige, dass ein lokales Maximum von $\bar{f}$ auch eines von f ist.

(v) Betrachte f auf ganz $\mathbb{R}^N$ und bilde $\nabla f|_{x=e_N}$.

(vi) Folgere nun, dass e_N ein Eigenvektor sein muss.