Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Bernold Fiedler, Hannes Stuke
http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Mittwoch, 27.11.2013, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.

Aufgabe 17: Beweise oder widerlege für beliebige komplexe a_{jk}, $1 \leq j, k \leq N$, wobei $\{1, ..., N\}^N$ die Abbildungen $\underline{j} : \{1, ..., N\} \to \{1, ..., N\}$ bezeichnet:

$$\sum_{j=1}^{N} \prod_{k=1}^{N} a_{jk} = \prod_{k=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{jk} \right); \tag{1}$$

$$\sum_{\underline{j} \in \{1,...,N\}^N} \prod_{k=1}^{N} a_{\underline{j}(k),k} = \prod_{k=1}^{N} \left(\sum_{i_k=1}^{N} a_{i_k,k} \right). \tag{2}$$

Aufgabe 18: Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_N) \;=\; (x_1 + x_2 + \cdots + x_N)^n$$

gegeben ist. Bestimme die Taylorentwicklung von f in $(0, 0, \ldots, 0)$ zur Ordnung n. Vergleiche (danach!) im Fall $N = 2$ mit dem Binomischen Satz.

Aufgabe 19: Es sei $f \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Für zwei beschränkte Quader $Q_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$ gelte $\operatorname{supp}(f) \subset Q_i,\ i = 1, 2$. Zeige, dass direkt aus der Definition des Integrals folgt:

$$\int_{Q_1} f(x)\mathrm{d}x \;=\; \int_{Q_2} f(x)\mathrm{d}x,$$

d.h. $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = \int_Q f(x)\mathrm{d}x$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset Q$ ist unabhängig vom konkret gewählten Quader Q.

Aufgabe 20: Definiere für beliebiges festes $R > 0,\ \varepsilon > 0$ die Hilfsfunktionen

$$\psi_\varepsilon^+(t) := \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq R \\ 1 + (R - t)/\varepsilon & R < t \leq R + \varepsilon \\ 0 & R + \varepsilon < t \end{cases}$$

und $\psi_\varepsilon^-(t) := \psi_\varepsilon^+(t + \varepsilon)$ für $t \geq 0$. Bestimme und vergleiche die beiden Integrale:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon^\pm(|x|_2)\, dx$$

sowie deren Limites für $\varepsilon \searrow 0$. Interpretiere das Resultat geometrisch.