

Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Bernold Fiedler, Hannes Stuke

<http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/>

Abgabe: Mittwoch, 04.12.2013, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.

Aufgabe 21: Archimedes (3. Jh. v. Chr.) von Alexandria hat das Verhältnis der Volumina geometrischer Objekte (Kugel, Kegel, Zylinder) bei gleicher Höhe und Breite bestimmt. Er hat dies aus geometrisch-physikalischen Überlegungen hergeleitet. Heute stehen wir zum Glück auf den Schultern der Giganten der Mathematikgeschichte, welche u.a. die Integrationsrechnung hervorgebracht haben.

Berechne die Volumina von Zylinder, Kugel und Kegel mit Hilfe der Integrationsrechnung und bestimme deren Verhältnis.

Aufgabe 22: Beweise den Satz von Fubini für $f \in C^0(K, \mathbb{R})$ mit $K := K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R}^n$, $K_1 \subset \mathbb{R}^m$, $K_2 \subset \mathbb{R}^{n-m}$ kompakt und $m < n$. Der Satz von Fubini lautet:

$$\int_K f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{K_2} \left(\int_{K_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_m \right) dx_{m+1} \cdots dx_n$$

Aufgabe 23: Sei $f \in C([-1, 1], \mathbb{R}_+)$ stetig und positiv. Zeige, dass dann gilt:

$$\left(\int_{-1}^1 f(x) dx \right) \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{f(x)} dx \right) \geq 4.$$

Bringe dazu die linke Seite auf die Form

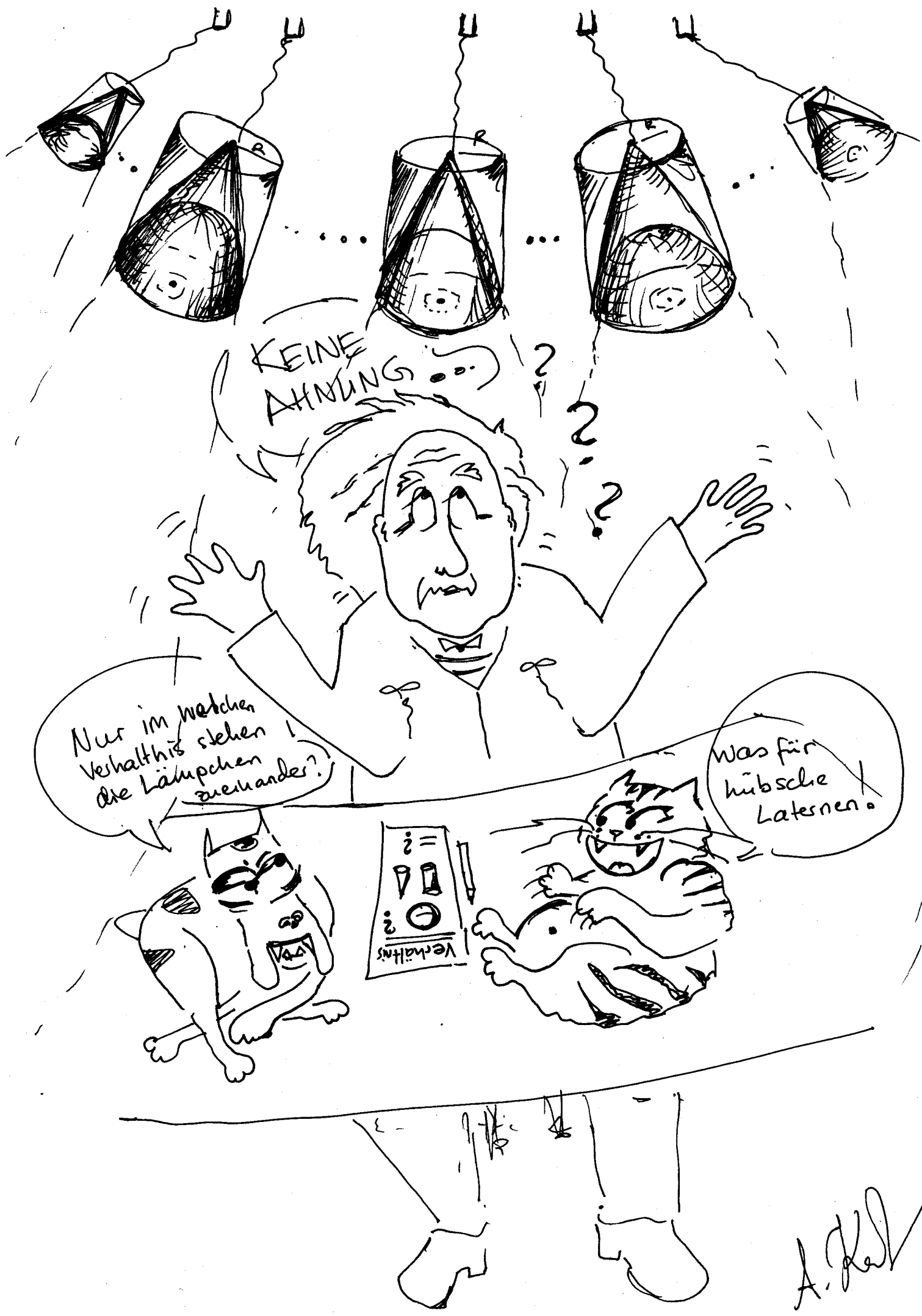
$$\frac{1}{2} \int_{[-1, 1]^2} \left(\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \right) dx dy.$$

Aufgabe 24: Betrachte $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Die Menge $\overset{\circ}{K}$ bezeichnet das Innere von K , sprich die größte offene Teilmenge von K . Der Rand ∂K von K ist $K \setminus \overset{\circ}{K}$. Wir wissen bereits, dass 1_K oberhalbstetig und $1_{\overset{\circ}{K}}$ unterhalbstetig ist. Gib, falls möglich, je ein Beispiel K für die folgenden (Un-)Gleichungen an:

$$0 < \text{vol}(\overset{\circ}{K}) = \text{vol}(K); \tag{1}$$

$$\text{vol}(\overset{\circ}{K}) < \text{vol}(K); \tag{2}$$

$$0 < \text{vol}(\partial K) = \text{vol}(K). \tag{3}$$



KEINE
AHNUNG...?

Nur im welchen
Verhältnis stehen
die Lämpchen
zueinander?

Was für
hübsche
Laternen!

Verhältnis
?
?
?
?

A. Kell

Hilfe, was ist mit der Stadt passiert?

Hilfe

Hilfe



Jedenfalls, können wir nicht mehr so leicht das Verhältnis zwischen
finden!

Ich glaub' ich kann's!



A. J. 2013