Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Bernold Fiedler, Hannes Stuke
http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Mittwoch, 15.01.2014, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.

Aufgabe 33: Bestimme das Oberflächenintegral

$$\int_{S^2} f \cdot n \, \mathrm{d}S, \qquad \text{mit} \qquad f(x,y,z) \;:=\; \begin{pmatrix} y^3 \\ z^3 \\ x^3 \end{pmatrix},$$

über der Einheitssphäre $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = 1\}$ mit äußerer Normalen n.

Aufgabe 34: Es sei $K \subset \mathbb{R}^N$ ein kompaktes C^1 Gebiet mit äußerer Normalen n. Ferner seien $u, v \in C^2(U, \mathbb{R})$ auf einer offenen Umgebung U von K gegeben. Definiere

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) \;=\; \nabla u(x) \cdot n(x)$$

Zeige, dass dann die Greenschen Formeln gelten

$$\text{(a)} \qquad \int_K v \, \Delta u \, \mathrm{d}x \;=\; -\int_K \sum_{i=1}^N u_{x_i} v_{x_i} \, \mathrm{d}x + \int_{\partial K} v \frac{\partial u}{\partial n} \, \mathrm{d}S,$$

$$\text{(b)} \qquad \int_K v \, \Delta u \, \mathrm{d}x \;=\; \int_K u \, \Delta v \, \mathrm{d}x + \int_{\partial K} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) \mathrm{d}S.$$

Aufgabe 35: Seien $f, g \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $u \in C^2(U, \mathbb{R})$. Dabei sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge. Zeige

(i) $\operatorname{rot}(\lambda f + \mu g) \;=\; \lambda \operatorname{rot} f + \mu \operatorname{rot} g,$

(ii) $\operatorname{rot}(uf) \;=\; u \operatorname{rot} f + (\operatorname{grad} u) \times f,$

(iii) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u \;=\; 0,$

(iv) $\operatorname{div} \operatorname{rot} f \;=\; 0.$

Hinweis: Mit $f \times g$ ist das Kreuzprodukt zweier Vektoren $f, g \in \mathbb{R}^3$ gemeint.

Aufgabe 36: Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{rot} f = 0$. Zeige, dass sich f als Gradient einer C^1-Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ schreiben lässt:

$$f = \operatorname{grad} \varphi.$$

Hinweis: Definiere φ durch (ein) geeignete(s) Wegintegral(e). Zeige dann, dass φ wohldefiniert ist und dass der Gradient das gesuchte Vektofeld liefert.