Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Bernold Fiedler, Hannes Stuke

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Mittwoch, 22.01.2014, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.

Aufgabe 37: Es sei $A \subset \mathbb{R}^N$ eine Lebesgue-Nullmenge. Zeige:

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists U \subset \mathbb{R}^N \text{ offen, so dass } A \subset U \text{ und } \mathrm{Vol}\,(U) < \epsilon.$$

Aufgabe 38: Es sei im weiteren $1 \leq p, q < \infty$. Gegeben sei eine Funktion

$$f \;\in\; \mathcal{L}^p \;=\; \left\{ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \;\middle|\; x \mapsto |g(x)|^p \text{ ist Lebesgue-integrierbar} \right\}$$

Betrachte nun die Voraussetzungen

(a) f ist beschränkt, beziehungsweise

(b) $\mathrm{supp}(f) \subset V$ und $\mathrm{Vol}(V) < \infty$.

und die Behauptungen

(i) $f \in \mathcal{L}^q$, für $q > p$, beziehungsweise

(ii) $f \in \mathcal{L}^q$, für $q < p$.

Betrachte alle vier Fälle, die aus beliebigen Kombinationen je einer Voraussetzung (a), (b) und je einer Behauptung (i), (ii) entstehen. Beweise oder widerlege die Behauptung in jedem der vier Fälle.

Aufgabe 39: Beweise oder widerlege für Lebesgue-integrierbare reelle Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(i) Das punktweise Maximum $h\,(x) := \max(f_1\,(x)\,, f_2\,(x))$ ist Lebesgue-integrierbar.

(ii) Das punktweise Minimum $h\,(x) := \min(f_1\,(x)\,, f_2\,(x))$ ist Lebesgue-integrierbar.

(iii) Der Quotient f_1/f_2 ist Lebesgue-integrierbar, falls f_1 und f_2 positiv sind.

(iv) $\sqrt{|f_1|}$ ist Lebesgue-integrierbar, falls f_1 einen kompakten Träger hat.

(v) Die Komposition $f_1 \circ f_2$ ist Lebesgue-integrierbar.

(vi) Das (punktweise) Produkt $f_1 \cdot f_2$ ist Lebesgue-integrierbar.

Aufgabe 40: Sei K eine kompakte Menge reeller Zahlen. Ist der (topologische) Rand von K immer eine Nullmenge?