Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Bernold Fiedler, Hannes Stuke

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Mittwoch, 29.01.2014, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.

Aufgabe 41: Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{-1} \sin x$ Lebesgue-integrierbar für $x \geq 0$?

Aufgabe 42: Beweise den Satz von Egorov. Dieser besagt, dass L^1 - Konvergenz auf Mengen großen Maßes sogar gleichmäßig ist.
Genauer: Es sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^N$ mit endlichem Volumen. Ferner sei $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Familie Lebesgue-integrierbarer Funktionen, die fast überall gegen eine Lebesgue-integrierbare Funktion f konvergiert. Zeige, dass dann für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, ein $k \in \mathbb{N}$ und eine Lebesgue-meßbare Menge $A \subset \Omega$ mit $\mathrm{Vol}(\Omega \setminus A) < \delta$ existiert, so dass für alle $x \in A$ und $j \geq k$ gilt:

$$|f(x) - f_j(x)| < \varepsilon$$

Freiwilliger Zusatz: Ist die Bedingung an das Volumen von Ω notwendig?

Aufgabe 43: Sei $X := L^1(\mathbb{R})$ und $T : \mathbb{R} \to L(X)$ die Shift-Abbildung $\tau \to T(\tau) \in L(X)$ mit $(T(\tau)u)(t) := u(t + \tau)$. Ist die Abbildung T stetig ?

Aufgabe 44: [Fatou Lemma] Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ eine Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen mit $f_n \geq 0$ fast überall. Weiter existiert ein $C > 0$, so dass für alle n: $\int f_n \leq C < \infty$. Zeige, dass dann gilt

$$f := \liminf_{n\to\infty} f_n \in \mathrm{Leb}$$

und

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n .$$

Freiwilliger Zusatz:

(i) Gib je ein Beispiel für Gleichheit und Ungleichheit an.

(ii) Ist die Aussage immer noch richtig, wenn das Integral des Betrages beschränkt ist, es aber keine Bedingung an das Vorzeichen der f_n gibt?