Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Bernold Fiedler, Hannes Stuke

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Mittwoch, 05.02.2014, 14.00 Uhr

Bitte wenigstens zwei der Aufgaben in Zweiergruppen bearbeiten.

Aufgabe 45: Es seien $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $1 \leq p, q < \infty$. Zeige, dass dann die Faltung

$$\Big(f * g\Big)(x) \; = \; \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) \, \mathrm{d}y$$

in $L^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ liegt, mit

$$\frac{1}{r} \; = \; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

Zeige, dass sich die L^r - Norm durch die Ungleichung

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

abschätzen lässt.
Hinweis: Es gilt

$$|f(x-y)g(y)| \; \leq \; \left(|f(x-y)|^p |g(y)|^q\right)^{1/r} \; |f(x-y)|^{1-p/r} \; |g(y)|^{1-q/r}$$

Nutze nun die Hölderungleichung.

Aufgabe 46: Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Betrachte den folgenden Operator L, auch *Laplace-Transformation* genannt

$$(Lf)(t) = \int_0^\infty e^{-ts} f(s) \, ds$$

Zeige, dass $Lf \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$.
Freiwilliger Zusatz: Sei f sogar differenzierbar mit Lebesgue-integrierbarer Ableitung. Was gilt dann für $(L\dot{f})$?

Aufgabe 47: Wir wollen eine Menge $V \subset [0,1) \subset \mathbb{R}$ konstruieren, deren charakteristische Funktion 1_V nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Definiere dazu die folgende Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$:

$$x \simeq y \quad \Longleftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

Das Auswahlaxiom der Mengenlehre postuliert die Existenz eines Vertretersystems: sei also $V \subset [0,1)$ eine Menge, die aus jeder Äquivalenzklasse der zuvor definierten Relation genau einen Vertreter enthält.

Ferner sei $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen im Intervall $[0,1)$. Definiere die translatierten Mengen

$$V_j \;=\; \{x \in [0,1) \mid \exists n \in \mathbb{Z} : \, x - r_j + n \in V\} \;=\; V + r_j \pmod 1, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

(i) Zeige, dass die Mengen V_j paarweise disjunkt sind.

(ii) Zeige, dass $[0,1) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} V_j$.

(iii) Zeige, dass die charakteristische Funktion

$$1_V(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } x \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Bemerkung: Diese Konstruktion einer nicht Lebesgue-integrierbaren Funktion zeigt insbesondere, dass hier keine Unzulänglichkeit unseres Integralbegriffs vorliegt. Allein die (gewünschte) Translationsinvarianz und σ-Additivität des Integrals liefern (unter Annahme des Auswahlaxioms) notwendig die Existenz nicht-integrierbarer Funktionen.

Aufgabe 48: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Beweise oder widerlege folgende Aussage:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \mathrm{Vol}\,(A) < \delta \Rightarrow \left| \int_A f\,(x)\,dx \right| < \epsilon$$

Hier bezeichnet A beliebige offene Teilmengen des $\mathbb{R}$.