Kernfragen zur Analysis

X. Lebesgue-Integral

1. Wie kann das Lebesgue-Integral als Grenzwert von Integralen halbstetiger Funktionen definiert werden?

2. Wie kann man die Lebesgue-integrierbaren Funktionen durch Approximation mit stetigen Funktionen charakterisieren?

3. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch?

    - Ist $f \in \mathrm{Leb}$, so sind $f^+, f^- \in \mathrm{Leb}$.
    - Ist $f \in \mathrm{Leb}$, so ist $|f| \in \mathrm{Leb}$.
    - Ist $|f| \in \mathrm{Leb}$, so ist $f \in \mathrm{Leb}$.
    - Sind $f, g \in \mathrm{Leb}$, so sind $\max(f, g), \min(f, g) \in \mathrm{Leb}$.

4. Was sind Lebesgue-Nullmengen? Gib wenigstens zwei äquivalente verschiedene Charakterisierungen an!

5. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch?

    - Ist N eine Nullmenge, so ist N abzählbar.
    - Ist N abzählbar, so ist N eine Nullmenge.
    - Ist N_k eine Nullmenge für jedes $k \in \mathbb{N}$, so auch die Vereinigung $\bigcup\{N_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.
    - Ist N_k eine Nullmenge für jedes $k \in \mathbb{Q}$, so auch die Vereinigung $\bigcup\{N_k \mid k \in \mathbb{Q}\}$.
    - Ist N_k eine Nullmenge für jedes $k \in \mathbb{R}$, so auch die Vereinigung $\bigcup\{N_k \mid k \in \mathbb{R}\}$.
    - $\mathbb{Q}$ ist eine Nullmenge.
    - Ist $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $\phi \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, so ist $\phi(N)$ eine Nullmenge.
    - Ist $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $\phi \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, so ist $\phi^{-1}(N)$ eine Nullmenge.

6. Welche hinreichenden Bedingungen an eine Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen gibt es, um Integral und Grenzwert vertauschen zu dürfen?

7. Wie lautet der Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz?

8. Wie lautet der Konvergenzsatz von Beppo Levi? Warum gilt er? Beweise!

9. Wie sind die Banachräume L^p definiert?

10. Wie kann man die Elemente in L^p als Grenzwerte von Folgen glatter Funktionen mit kompaktem Träger charakterisieren?

11. Wie lautet die Hölder-Ungleichung?

12. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? (Es sei $1 \leq p < q < +\infty$.)

    - Ist $f \in L^p$ beschränkt, so ist $f \in L^q$.

- Ist $f \in L^q$ beschränkt, so ist $f \in L^p$.
- Ist $f \in L^p$ und $\mathrm{Vol}(\mathrm{supp}\, f) < \infty$, so ist $f \in L^q$.
- Ist $f \in L^q$ und $\mathrm{Vol}(\mathrm{supp}\, f) < \infty$, so ist $f \in L^p$.

13. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen. Unter welchen Bedingungen an die Funktion $f : U \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ ist das Parameterintegral:

$$F : U \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dy$$

   (a) integrierbar
   (b) stetig
   (c) differenzierbar

14. Wie ist die Faltung zweier Funktionen definiert?

15. Wie ist die Fouriertransformation einer Funktion $f \in L^1\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}\right)$ definiert?

16. Welche der folgenden Aussagen über die Fouriertransformation ist richtig, welche ist falsch?
   - $\widehat{\tau_a f}(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{i a^T \xi}$
   - Ist $f, g \in L^1$ dann gilt $\widehat{f \star g} = (2\pi)^{N/2} \hat{f} \cdot \hat{g}$
   - Ist $f \in C_c^k$ dann existiert ein M mit $\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq M(1 + \|\xi\|_2)^{-k}$

17. Berechne die Fouriertransformen von $f_1(x) := 1_{[-1,1]}(x)$. und $f_2(x) := 1_{[0,2\pi]}(x) \sin x$

18. Was besagt der Satz von Plancherel über die Existenz Stetigkeit und Umkehrbarkeit der Fouriertransformation?