Kernfragen zur Analysis III

VII. Differentiation im Banachraum

Notation: Seien X, Y Banachräume und $U \subset X$ offen.

1. Wann heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen Banachräumen X und Y Fréchet-differenzierbar? Was ist die Fréchet-Ableitung von f ?
2. Ist eine Fréchet-differenzierbare Abbildung f zwischen Banachräumen immer stetig?
3. Was sind die Gâteaux-Ableitungen einer Abbildung $f : X \to Y$ zwischen Banachräumen X und Y ?
4. Was sind die partiellen Ableitungen einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$?
5. Wie lässt sich die (als existent angenommene) Fréchet-Ableitung einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch ihre partiellen Ableitungen ausdrücken?
6. Was ist die Fréchet-Ableitung einer beschränkten bilinearen Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$.
7. Was ist der Gradient der Abbildung $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|_2^{-1}$, wobei $\| \cdot \|_2$ die euklidische Norm bezeichnet?
8. Wie lautet die Kettenregel für die Ableitung von $f \circ g$?
9. Wie lässt sich die Linearisierung einer Abbildung $f \circ g$ durch die partiellen Ableitungen der Abbildungen $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ ausdrücken?
10. Warum sind stetig differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit gleichmäßig beschränkter Ableitung Lipschitz-stetig? (Beweis!)
11. Welche der folgenden Aussagen sind für Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ richtig, welche falsch?
    (a) Partiell differenzierbare Abbildungen sind stetig.
    (b) Fréchet-diffenzierbare Abbildungen sind stetig.
    (c) Partiell differenzierbare, stetige Abbildungen sind Fréchet-differenzierbar.
    (d) Stetig partiell differenzierbare Abbildungen sind Fréchet-differenzierbar.
    (e) Stetig partiell differenzierbare Abbildungen sind stetig Fréchet-differenzierbar.
12. Wie hängen Fréchet-Ableitung und Gâteaux-Ableitungen einer Abbildung $f : X \to Y$ zwischen Banachräumen X und Y zusammen? Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen an die Gâteaux-Ableitung folgt die Existenz der Fréchet-Ableitung.
13. Wie lautet der Satz über implizite Funktionen?

14. Unter welcher hinreichenden Bedingung ist eine Abbildung $f : X \to Y$ lokal invertierbar? Wie lautet die Ableitung der Inversen Abbildung f^{-1}?

15. Warum bezeichnet der Gradient die „Richtung des steilsten Anstiegs“ einer Funktion $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$?

16. Wie ist die zweite Fréchet-Ableitung einer Abbildung $f : X \to Y$ zwischen Banachräumen X und Y definiert? Was sind die zweiten Gâteaux-Ableitungen?

17. Wie lässt sich die zweite Fréchet-Ableitung einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch ihre partiellen Ableitungen ausdrücken?

18. Wann darf man die Reihenfolge der zweiten partiellen Ableitungen vertauschen?

19. Was sind die erste und zweite Ableitung des Skalarproduktes im $\mathbb{R}^N$?

20. Wie lautet die Kettenregel für die zweite Ableitung von $f \circ g$?

21. Welche notwendigen und welche hinreichenden Bedingungen für die Existenz lokaler Maxima/Minima einer Funktion $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sind aus der Vorlesung bekannt.

22. Wie lautet die n-te Taylor-Approximation einer Funktion $f \in C^{n+1}(U, Y)$, $U \subseteq X$ offen, in einem Punkt $x_0 \in U$? Welche Darstellung des Restgliedes ist aus der Vorlesung bekannt?