Kernfragen zur Analysis

VIII. Integration im $\mathbb{R}^N$

1. Wie kann man stetige Funktionen mit kompaktem Träger im $\mathbb{R}^N$ integrieren?
2. Wieviele lineare, monotone und translationsinvariante Funktionale auf $C_c^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ gibt es?
3. Was sind halbstetige Funktionen?
4. Wie kann man halbstetige Funktionen als monotone Limiten stetiger Funktionen charakterisieren?
5. Welche hinreichenden zusätzlichen Voraussetzungen an oberhalb- bzw. unterhalbstetige Funktionen f, g und reelle Zahlen λ kennst Du, um sicherzustellen, dass $f+g$, fg, λf, $f \circ g$ wieder oberhalb- bzw. unterhalbstetig sind?
6. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch?
   (Hierbei seien $f_n \in C^0(K, \mathbb{R})$, $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt, $N \in \mathbb{N}$)
   - Konvergiert f_n gleichmäßig gegen f, so ist f stetig.
   - Konvergiert f_n gleichmäßig gegen f, so ist f halbstetig.
   - Konvergiert f_n monoton gegen f, so ist f stetig.
   - Konvergiert f_n monoton gegen f, so ist f halbstetig.
   - Konvergiert f_n monoton gegen ein stetiges f, so konvergiert f_n gleichmäßig.
7. Sind die charakteristischen Funktionen offener Mengen oberhalb- oder unterhalbstetig?
8. Wie kann man halbstetige Funktionen integrieren?
9. Wie lautet der Satz von Fubini für stetige Funktionen?
10. Wie lautet die Transformationsformel für Integrale stetiger Funktionen mit kompaktem Träger im $\mathbb{R}^N$?
11. Unter welchen Transformationen ist das Integral von Funktionen $f \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ invariant?
    - Spiegelungen
    - Rotationen
    - Scherungen
    - Drehstreckung
    - Translationen
12. Unter welchen Voraussetzungen an eine Funktionenfolge halbstetiger Funktionen lassen sich Integral und Grenzwert bzw. Supremum vertauschen?

13. Wie kann man Volumina von Körpern bestimmen? Wie berechnest Du speziell das Volumen der 3-dimensionalen Kugel?