Extrablatt zur Bekämpfung der Langeweile über die Ferien

Analysis III

Bernold Fiedler, Hannes Stuke
http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Mittwoch, 15.01.2014, 14.00 Uhr

Nur bearbeitete Aufgaben werden besprochen. Keine der Aufgaben zählt zum Aufgaben-Soll. Erreichte Punkte werden aber trotzdem positiv angerechnet und können auch ein früheres Minus ausgleichen. Frohe Weihnacht, guten Rutsch und ein friedliches Jahr 2014.

Weihnachtsaufgabe 1: Dir obliegt die Versorgung der Gäste der Neujahrs-Party mit Getränken. Dazu transportierst Du ein Fass Bowle auf einem Schlitten durch die Stadt. Aufgrund diverser Schlaglöcher beginnt das Fass jedoch bedrohlich zu kippeln. Um es zu stabilisieren, schenkst Du die Bowle an umstehende Schaulustige aus. (Selbst trinkst Du natürlich nichts: Don't drink and drive!)

Wie weit muss das Fass ausgetrunken werden, damit es möglichst stabil steht?

Hinweis: Die Höhe des Schwerpunktes

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} x\,\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

soll also minimiert werden! Hierbei ist ρ die Dichte, die für übliche irdische Gefäße und Flüssigkeiten in selbigen einen beschränkten Träger hat. Das leere Fass soll dabei eine Masse m und eine Schwerpunktshöhe h haben (die man normieren kann). Die Form des Fasses kann als zylindrisch angenommen werden.

Zusätze: Was passiert für ganz leichte Gefäße, $m \to 0$, bei konstanter Form resp. Schwerpunktshöhe? Kannst Du die Schwerpunktshöhe auch noch minimieren, falls das Fass vor dem Umtrunk schon vom Schlitten gefallen war und deshalb nun eine unregelmäßige Form aufweist?

Weihnachtsaufgabe 2: Nachdem der Bowle-Transport dank der selbstlosen Hilfe vieler Passanten gut geklappt hat, wendet sich eine Transportfirma an Dich.

Die Firma plant, Bowle in Fässern zu transportieren, die entsprechend der vorigen Aufgabe zwecks maximaler Stabilität befüllt werden. Alle Fässer haben die gleiche (zylindrische) Form, Größe und Schwerpunktshöhe. Allerdings stehen unterschiedliche Materialien, sprich Massen m, für die Fässer zur Verfügung.

Bestimme die Masse des Fasses mit bestmöglicher Nutzlast, d.h. maximalem Verhältnis der Masse der eingefüllten Bowle zur Gesamtmasse von Bowle und Fass.

Bestimme eine allgemeine Lösung und/oder wähle plausible Werte der Parameter.

Weihnachtsaufgabe 3: Die Mercator-Projektion $P : S^2 \backslash \{N, S\} \to Z$ nach G. Mercator (1512-1594) bildet die Einheitserde S^2 (bis auf den Nordpol N und den Südpol S) auf den Zylinder $Z = S^1 \times \mathbb{R}$ ab, der die Erde am Äquator berührt. Koordinaten auf S^2 sind hier die geographische Länge $\phi \in [0, 2\pi)$ und die geographische Breite $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Die Projektion hat die Form $P(\phi, \theta) = (\phi, p(\theta))$ mit $p(0) = 0$. Bestimme $p : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, so dass P winkeltreu ist.

(i) Bestimme konkret die Abstände l zwischen Breitenkreis x Grad nördlicher Breite und dem Äquator für

$$x \;\in\; \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80\}$$

Vergleiche die Ergebnisse mit folgenden Werten, die von einer Orginalkarte Mercators stammen. (1567, ca. 100 Jahre vor Newton)

x	10	20	30	40	50	60	70	80
l/mm	55	112	172	238	314	407	534	749

(ii) Folgere, dass Bilder von sogenannten Loxodromen, d.h. Kurven auf der Sphäre, die alle Längenkreise unter dem gleichen Winkel schneiden, Geraden auf Z sind. Deshalb sind die Mercator-Karten für die Seefahrt von großer Bedeutung. Sie ermöglichen die Navigation per Lineal (z.B. in Piratenfilmen).

Weihnachtsaufgabe 4: Zeige, dass die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$

$$S^2 \;=\; \left\{(x_1, x_2, x_3) \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\} \;\subset\; \mathbb{R}^3$$

eine C^1-Untermannigfaltigkeit der Dimension zwei ist. Zeige, dass die beiden Abbildungen $\phi_{N,S} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
\phi_N(x_1, x_2) \;&=\; \frac{2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}(x_1, x_2, -1) + (0, 0, 1), \\
\phi_S(x_1, x_2) \;&=\; \frac{2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}(x_1, x_2, 1) + (0, 0, -1).
\end{aligned}$$

einen Atlas bilden. (Dies sind die Umkehrungen der stereographischen Projektionen.) Bestimme die Kartenwechsel für diese beiden Karten.

Freiwilliger Zusatz: Was sind die Bilder von Geraden und Kreisen unter dem Kartenwechsel?

Weihnachtsaufgabe 5: Welche Punkte auf der Einheitskugel

$$S^{n-1} \;=\; \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2^2 = 1\right\}$$

in $\mathbb{R}^n$ minimieren bzw. maximieren die p-Norm, $1 < p < \infty$?

$$\|x\|_p \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Weihnachtsaufgabe 6: Ist die folgende Funktion $F : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ an der Null Gateaux - bzw. Frechet differenzierbar?

$$(F(x))(t) = \sin x(t)$$

Weihnachtsaufgabe 7: Wo ist die sup - Norm auf $C[0,1]$ Gateaux- bzw. Frechet differenzierbar? Was ist mit der sup - Norm auf $C_0(\mathbb{R}) := \left\{ f \in C(\mathbb{R}), \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \right\}$?

Weihnachtsaufgabe 8: Seien X, Y Banachräume, $U \subseteq X$ offen und $f : U \to Y$ differenzierbar mit $Df(x) = 0$ für alle $x \in U$. Zeige, dass f auf jeder Zusammenhangskomponente von U konstant ist.

Weihnachtsaufgabe 9: [Inverser Banachscher Fixpunktsatz] Sei X ein Banachraum und $f : X \to X$ eine surjektive Abbildung. Ferner existiere eine Konstante $M > 1$, so dass für alle $x, y \in X$ gilt:

$$\|f(x) - f(y)\| \;\geq\; M\|x - y\|.$$

Beweise, dass f dann genau einen Fixpunkt besitzt.

Weihnachtsaufgabe 10: Es sei $O(n)$ die orthogonale Gruppe, d.h. die Menge der reellen $n \times n$ - Matrizen mit $A^T A = \mathrm{Id}$. Tatsächlich ist $O(n)$ eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ mit $N = n^2$. Berechne den Tangentialraum $T_{\mathrm{Id}}O(n)$.
Freiwilliger Zusatz: Zeige, dass $O(n)$ eine (glatte) Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist. Welche Dimension hat $O(n)$? Ist $O(n)$ zusammenhängend? Ist $O(n)$ kompakt?

Weihnachtsaufgabe 11: Sei X ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Definiere eine Abbildung

$$F : C^1(X,X)^3 \times X \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad F(\chi, \varphi, \rho, x) \;=\; \Big\langle \chi(\varphi(x)), \chi(\rho(x)) \Big\rangle.$$

Bestimme die partiellen Ableitungen ($\partial_\chi F$, $\partial_\varphi F$, $\partial_\rho F$, $\partial_x F$).

Weihnachtsaufgabe 12: Es sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $|f(x)| \to \infty$ für $|x| \to \infty$. Weiter sei $g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Das beschränkte Intervall $[a,b]$ bestehe nur aus regulären Werten von f. Zeige, dass dann gilt

$$\int\limits_{\{x \,|\, a<f(x)<b\}} g \,\mathrm{d}x \;=\; \int\limits_a^b \left(\int_{f^{-1}(c)} g \, |\nabla f|_2^{-1} \,\mathrm{d}S \right) \mathrm{d}c.$$

Weihnachtsaufgabe 13: Bezeichne $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x|_2 = 1\}$ die $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre.

(i) Bestimme den Oberflächeninhalt der 2-Sphäre S^2,

$$\mathrm{vol}_2(S^2) := \int_{S^2} 1 \, \mathrm{d}S,$$

z.B. durch Wahl einer Karte in Polarkoordinaten.

(ii) Bestimme das $(n-1)$-dimensionale Volumen der $(n-1)$-Sphäre,

$$\mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1}) := \int_{S^{n-1}} 1 \, \mathrm{d}S.$$

(iii) Vergleiche mit dem n-dimensionalen Volumen

$$\mathrm{vol}_n(B^n_{(1,1+\varepsilon)}) := \int_{B^n_{(1,1+\varepsilon)}} 1 \, \mathrm{d}x,$$

der Kugelschale $B^n_{(1,1+\varepsilon)} = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, 1 \leq |x|_2 \leq 1 + \varepsilon\}$, und zeige, dass

$$\mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1}) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathrm{vol}_n(B^n_{(1,1+\varepsilon)}).$$