

Übungen zur Vorlesung
Analysis III
Stefan Liebscher
<http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/>
Abgabe: Donnerstag, 23.10.2014, 10:00

Aufgabe 1: Seien $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 -Funktionen. Drücke die Hesse-Matrix

$$\left(\frac{\partial^2 (g \circ f)}{\partial x_i \partial x_j} (x) \right)_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$$

durch die partiellen Ableitungen von g und f bis zur zweiten Ordnung aus.

Aufgabe 2: Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar. Die partiellen Ableitungen $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ seien auf U beschränkt.

Beweise oder widerlege: Dann ist f stetig.

Aufgabe 3: Seien X, Y Banachräume, $U \subseteq X$ offen und $f : U \rightarrow Y$ differenzierbar mit $Df(x) = 0$ für alle $x \in U$. Zeige, dass f auf jeder Zusammenhangskomponente von U konstant ist.

Aufgabe 4: Die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ sei homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, d.h. für alle $\lambda > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x).$$

Zeige, dass dann für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die *Eulersche Identität* gilt:

$$\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x).$$