Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Stefan Liebscher

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 30.10.2014, 10:00

Aufgabe 1: Sei $F : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ definiert durch

$$F(A, v) \;=\; A\, v.$$

Zeige, dass F eine C^2 Funktion ist, und berechne die erste und zweite Ableitung.

Aufgabe 2:

(i) Sei $f : X \times X \to Y$ eine differenzierbare Funktion, X und Y Banachräume. (Z.B. indem stetige partielle Ableitungen $\partial_1 f, \partial_2 f : X \times X \to L(X, Y)$ existieren.) Definiere die Funktion $g : X \to Y$ als Auswertung von f auf der Diagonalen:

$$g(x) \;:=\; f(x, x).$$

Zeige, dass g ebenfalls differenzierbar ist mit

$$[Dg(x)]h \;=\; [Df(x, x)](h, h) \;=\; [\partial_1 f(x, x) + \partial_2 f(x, x)]h.$$

(ii) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) \;=\; \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{für} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

Berechne die partiellen Ableitungen von f in allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sowie die Ableitung der entsprechend (i) definierten Funktion $g(x) = f(x, x)$ in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$. Erkläre, was im Nullpunkt passiert.

Aufgabe 3: Setze $I = [0,1]$ und $X = BC^0(I, \mathbb{R})$. Betrachte die Abbildung

$$F \,:\, I \times X \to \mathbb{R}, \qquad (x,g) \mapsto g(x).$$

Zeige

(i) Für jedes $x \in I$ ist die partielle Abbildung

$$F(x,\cdot) \,:\, X \to \mathbb{R}, \qquad g \mapsto g(x)$$

stetig und linear, d.h. $F(x,\cdot) \in L(X,\mathbb{R})$.

(ii) F ist stetig. ($I \times X \subset \mathbb{R} \times X$ mit Norm $\|(x,g)\| = \max\{|x|, \|g\|_\infty\}$.)

(iii) Aufgefasst als Abbildung in den Raum der beschränkten linearen Funktionale (siehe (i)), ist

$$\tilde{F} \,:\, I \to L(X,\mathbb{R}), \qquad x \mapsto F(x,\cdot)$$

(überall) unstetig.

Freiwilliger Zusatz: Was passiert für $X = BC^1(I,\mathbb{R})$?

Aufgabe 4: Betrachte zu gegebenen positiven Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ das *Potenzmittel*

$$P(\alpha) \,:=\, \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^\alpha\right)^{1/\alpha}, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(i) Berechne die Ableitung des Potenzmittels in allen Punkten $\alpha \neq 0$.

(ii) Drücke den Quotienten $P'(\alpha)/P(\alpha)$ so aus, dass die Parameter $a_1, \ldots, a_n$ nur in der Form $a_k/P(\alpha)$ eingehen.

Freiwilliger Zusatz: die JENSENsche Ungleichung zeigt dann, dass $P'(\alpha) \geq 0$.