Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Stefan Liebscher

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 6.11.2014, 10:00

Aufgabe 9: Sei Ω eine konvexe Menge im Banachraum X. Zeige, dass die folgenden Definitionen für die Konvexität einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ äquivalent sind:

(i) $\forall a, b \in \Omega,\ \lambda \in [0,1]$: $\quad f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$.

(ii) $\{(x,p) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid p \geq f(x)\}$ ist eine konvexe Menge.

Aufgabe 10: Seien Ω eine konvexe Menge im Banachraum X und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ konvex sowie beschränkt. Zeige, dass dann f stetig in inneren Punkten von Ω ist.

Aufgabe 11: Gegeben seien n Punkte $p^{(1)}, \ldots, p^{(n)} \in \mathbb{R}^N$. Bestimme den Punkt $x \in \mathbb{R}^N$, der die Summe der Quadrate der euklidischen Abstände

$$\sum_{k=1}^{n} \|x - p^{(k)}\|_2^2 \;:=\; \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{N} \left(x_\ell - p_\ell^{(k)}\right)^2$$

minimiert.

Aufgabe 12: Die Höchstmaße für sperrige Pakete (quaderförmige Sendungen) sind laut den Service-Informationen der Post: „Länge höchstens 200 Zentimeter, Gurtmaß (Länge plus größter nicht in Längsrichtung gemessener Umfang zusammen) maximal 360 Zentimeter.“

Bestimme das Paket mit dem größten Volumen, das die Höchstmaße der Post nicht überschreitet.

Freiwilliger Zusatz: Ende des letzten Jahrtausends hieß die Schranke noch „Länge höchstens 200 Zentimeter, Länge plus größter nicht in Längsrichtung gemessener Umfang zusammen maximal 450 Zentimeter“. Wie schlimm hat uns der „Niedergang der Zeit“ erwischt?