Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Stefan Liebscher

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 20.11.2014, 10:00

Aufgabe 17: Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_N) \;=\; (x_1 + x_2 + \cdots + x_N)^n$$

gegeben ist. Bestimme die Taylorentwicklung von f in $(0, 0, \ldots, 0)$ zur Ordnung n. Vergleiche (danach!) im Fall $N = 2$ mit dem Binomischen Satz.

Aufgabe 18: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion (d.h. gleichmäßiger Grenzwert von Treppenfunktionen t_k). Zeige, dass f dann Riemann-integrierbar ist und das Regelintegral von f mit dem Riemann-Integral von f übbereinstimmt, d.h.

$$\text{Riemann}\!\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \text{Regel}\!\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 19: Sei $f \in C([a, b], \mathbb{R}_+)$ stetig und positiv. Zeige, dass dann gilt:

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right) \;\geq\; (b-a)^2.$$

Bringe dazu die linke Seite auf die Form

$$\frac{1}{2}\int_Q \left(\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad Q = [a, b]^2 \subset \mathbb{R}^2.$$

Freiwilliger Zusatz: Beweise die Ungleichung, ohne die vorgeschlagene Umformung zu verwenden.

Aufgabe 20: [vgl. Forster] Betrachte den Raum

$$C_{2\pi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \;=\; \{f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \;|\; \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{Z}^n \;:\; f(x) = f(x + 2\pi k)\}$$

der stetigen, gitter-periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass die durch

$$I(f) \;=\; \int_0^{2\pi}\left(\cdots\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2\right)\cdots\right)\mathrm{d}x_n$$

definierte Abbildung $I : C_{2\pi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ monoton, linear und translationsinvariant ist.

Freiwilliger Zusatz: Gibt es noch andere Abbildungen $\tilde{I}$ mit diesen Eigenschaften?