Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Stefan Liebscher

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 27.11.2014, 10:00

Aufgabe 21: Bestimme das Volumen folgender Mengen unter Benutzung der rekursiven Definition des Integrals im $\mathbb{R}^N$ aus der Vorlesung:

(i) Kugel: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;

(ii) Ellipsoid: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1\}$.

Aufgabe 22:

(i) Es seien $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ oberhalb stetig und $\lambda \in [0, +\infty)$. Sind dann die Funktionen

$$f + g, \quad f - g, \quad \lambda f, \quad f \cdot g, \quad f/g,$$

dort wo sie definiert sind, oberhalb stetig?

(ii) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oberhalb stetig und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Sind dann die Funktionen

$$f \circ g \quad \text{beziehungsweise} \quad g \circ f$$

wieder oberhalb stetig?

Aufgabe 23: Es sei $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ unterhalb stetig und $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

(i) Es gibt ein $x_0 \in K$ mit $f(x_0) = \sup\{f(x) \,|\, x \in K\}$, d.h. f nimmt sein Maximum an.

(ii) Es gibt ein $x_1 \in K$ mit $f(x_1) = \inf\{f(x) \,|\, x \in K\}$, d.h. f nimmt sein Minimum an.

Aufgabe 24: Sei $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ unterhalb stetig und konvex. Weiter gelte

$$\mathrm{Dom}(f) \;:=\; \{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) < +\infty\} \;\neq\; \emptyset.$$

Definiere die Legendre-Transformierte von f durch

$$f^* : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \qquad f^*(y) \;:=\; \sup_{x \in \mathrm{Dom}(f)} \Big(\langle y, x\rangle - f(x)\Big).$$

Dabei bezeichnet $\langle y, x\rangle = \sum_{k=1}^N y_k x_k$ das Euklidische Skalarprodukt von x und y.

(i) Zeige, dass die Legendre-Transformierte von f ebenfalls stets unterhalb stetig und konvex ist.

(ii) Berechne die Legendre-Transformierten g_1^*, g_2^*, $(g_1^*)^*$ und $(g_2^*)^*$ für die Funktionen $g_1, g_2 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$,

$$g_1(x) \equiv 0, \qquad\qquad g_2(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2,$$

d.h. der konstanten Funktion Null sowie der halben Euklidischen Norm.

Freiwilliger Zusatz: Zeige, dass $\mathrm{Dom}(f^*) \neq \emptyset$ ist.

Bemerkung: In der Physik (Mechanik) heißt die Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion $L(t, u, p)$ bezüglich p die zugehörige Hamilton-Funktion H.